参考答案

第 15 章　分式

15.1　分式及其基本性质

1. 分式

知识梳理

1. 整式　字母　分子　分母

2. $B\neq0$　$B=0$　**3.** $A=0$ 且 $B\neq0$

重难突破

1. D

2. 解:(1)∵分式 $\frac{3}{2x+1}$ 无意义,

∴ $2x+1=0$,解得 $x=-\frac{1}{2}$,即 $x=-\frac{1}{2}$ 时分式无意义.

(2)∵分式 $\frac{1}{|x|-2}$ 无意义,

∴ $|x|-2=0$,解得 $x=\pm2$,即 $x=\pm2$ 时分式无意义.

3. C

基础巩固

1. B　**2.** A　**3.** A

4. <5　为任何实数　[当分子、分母同号时,分式的值为正;当分子、分母异号时,分式的值为负.对于分式 $\frac{-4}{x^2+1}$,无论 x 取何值,$x^2+1\geqslant1$ 都成立.]

5. 5

6. 解:∵ $\frac{(a-4)^2+|b^2-9|}{b+3}=0$,

∴ $(a-4)^2+|b^2-9|=0$,

解得 $a=4,b=\pm3$.

又∵ $b+3\neq0$,∴ $b\neq-3$,∴ $b=3$,

∴ $2a+3b=2\times4+3\times3=17$.

素养提升

7. 解:∵ $x=-4$ 时,分式无意义,

∴当 $x=-4$ 时,$2x+a=0$.

解得 $a=8$.

∵ $x=2$ 时,分式的值为 0,

∴当 $x=2$ 时,$x-b=0$.

解得 $b=2$. ∴ $\frac{a+b}{a-3b}=\frac{8+2}{8-3\times2}=5$.

2. 分式的基本性质

第 1 课时　分式的基本性质

知识梳理

1. 整式　不变

重难突破

1. C　**2.** B

基础巩固

1. C　**2.** B　**3.** B　**4.** A

5. $\frac{4x+20}{5x-10}$　**6.** y　**7.** 10

8. 解:(1) $-\frac{-x^3y}{3ab^2}=\frac{x^3y}{3ab^2}$.

(2) $\frac{-5a}{-13x^2}=\frac{5a}{13x^2}$.

(3) $-\frac{-a^3}{-17b^2}=-\frac{a^3}{17b^2}$.

素养提升

9. 解: $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=\frac{(x^4+x^2+1)\div x^2}{x^2\div x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+1=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1$,

$\because x+\frac{1}{x}=4$, $\therefore \frac{x^4+x^2+1}{x^2}=4^2-1=15$,

$\therefore \frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{15}$.

第2课时 分式的约分与通分

重难突破

1. 解: (1) 原式 $=\frac{(m+n)(m-n)}{(m+n)^2}=\frac{m-n}{m+n}$.

(2) $\frac{2xy}{(x+y)^2}=\frac{2xy(x-y)}{(x+y)^2(x-y)}$;

$\frac{x}{x^2-y^2}=\frac{x(x+y)}{(x+y)^2(x-y)}$.

2. A [A. ☆为 $2x$ 时, $\frac{1-☆}{x-1}=\frac{1-2x}{x-1}$, 原式为最简分式, 故 A 选项符合题意; B. ☆为 x 时, $\frac{1-☆}{x-1}=\frac{1-x}{x-1}=-1$, 原式不是最简分式, 故 B 选项不符合题意; C. ☆为 x^2 时, $\frac{1-☆}{x-1}=\frac{1-x^2}{x-1}=-1-x$, 原式不是最简分式, 故 C 选项不符合题意; D. ☆为 1 时, $\frac{1-☆}{x-1}=\frac{1-1}{x-1}=0$, 原式不是分式, 故 D 选项不符合题意.]

基础巩固

1. B **2.** B **3.** D **4.** D

5. $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$(答案不唯一)

6. $2a^2+7a+11$

7. 解: (1) $\frac{2a(a-1)}{8ab^2(1-a)}=-\frac{1}{4b^2}$.

(2) $\frac{2}{4-9m^2}=\frac{2}{(2+3m)(2-3m)}=\frac{2(2-3m)}{(2+3m)(2-3m)^2}$, $\frac{3}{9m^2-12m+4}=\frac{3}{(2-3m)^2}=\frac{3(2+3m)}{(2+3m)(2-3m)^2}$.

素养提升

8. 解: 小明的解法正确. 小华的解法错误.

$\frac{x^2-y^2}{x+y}=\frac{(x^2-y^2)(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{(x^2-y^2)(x-y)}{x^2-y^2}=x-y$.

这里分子、分母同时乘以 $(x-y)$, 若 $x-y=0$, 则该方法不合适.

15.2 分式的运算

1. 分式的乘除

知识梳理

1. 分子的积　分母的积　最简分式

2. 分子　分母　相乘

3. 分子　分母

重难突破

1. C **2.** C **3.** B

基础巩固

1. C **2.** A **3.** A **4.** B **5.** C

6. $\frac{2}{x+1}$

7. 解: 原式 $=\frac{2m}{3n}\cdot\frac{9n^2}{p^2}\cdot\frac{p^2}{mn}=\frac{6mn}{p^2}\cdot\frac{p^2}{mn}=6$.

素养提升

8. 解：$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^{2}+\frac{1}{a^{2}}\right)\left(a^{4}+\frac{1}{a^{4}}\right)\left(a^{8}+\frac{1}{a^{8}}\right)\cdot(a^{2}-1)$

$=a\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^{2}+\frac{1}{a^{2}}\right)\left(a^{4}+\frac{1}{a^{4}}\right)\cdot\left(a^{8}+\frac{1}{a^{8}}\right)$

$=a\left(a^{2}-\frac{1}{a^{2}}\right)\left(a^{2}+\frac{1}{a^{2}}\right)\left(a^{4}+\frac{1}{a^{4}}\right)\left(a^{8}+\frac{1}{a^{8}}\right)$

$=a\left(a^{4}-\frac{1}{a^{4}}\right)\left(a^{4}+\frac{1}{a^{4}}\right)\left(a^{8}+\frac{1}{a^{8}}\right)$

$=a\left(a^{8}-\frac{1}{a^{8}}\right)\left(a^{8}+\frac{1}{a^{8}}\right)$

$=a\left(a^{16}-\frac{1}{a^{16}}\right)$

$=a^{17}-\frac{1}{a^{15}}$.

2. 分式的加减

第 1 课时　分式的加减

知识梳理

1. 不变　相加减

2. 通分　同分母

重难突破

1. D　**2.** A

基础巩固

1. C　**2.** B　**3.** D　**4.** C

5. 1

6. $\frac{2}{a-2}$

7. $\frac{1}{a-1}$

8. 解：原式$=\frac{2}{1-x^{2}}+\frac{2}{1+x^{2}}+\frac{4}{1+x^{4}}=\frac{4}{1-x^{4}}+\frac{4}{1+x^{4}}=\frac{8}{1-x^{8}}$.

9. 解：(1)因式分解

(2)三　6 没变号

(3)原式$=\frac{4x}{(x+3)(x-3)}-\frac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x-6}{(x+3)(x-3)}=\frac{2}{x+3}$.

素养提升

10. 解：(1) ∵ $A+B=\frac{x-3}{x+2}+\frac{2x+9}{x+2}=\frac{3x+6}{x+2}=\frac{3(x+2)}{x+2}=3$,

∴ A 与 B 互为“和整分式”，“和整值”$k=3$.

(2)①由题意，得$\frac{4x-2}{x-3}+\frac{G}{x^{2}-9}=4$,

去分母，得$(4x-2)(x+3)+G=4(x+3)(x-3)$,

整理，得 $G=-10x-30$.

② ∵ $G=-10x-30$,

∴ $D=\frac{-10x-30}{x^{2}-9}=\frac{-10(x+3)}{(x+3)(x-3)}=-\frac{10}{x-3}$.

∵分式 D 的值为正整数，

∴ $x-3=-1$ 或 -2 或 -5 或 -10.

当 $x-3=-1$ 时，$x=2$；

当 $x-3=-2$ 时，$x=1$；

当 $x-3=-5$ 时，$x=-2$(舍去)；

当 $x-3=-10$ 时，$x=-7$(舍去)，

$\therefore x$ 值为 1 或 2.

第 2 课时 分式的混合运算

重难突破

1. A

2. 解：$\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x}\div\left(x-\dfrac{4}{x}\right)$

$=\dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)}\div\dfrac{x^2-4}{x}$

$=\dfrac{x-2}{x}\cdot\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{1}{x+2}$.

$\because -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$，且 x 是整数，

$\therefore x=1$ 或 -1 或 ±2(舍去)，

当 $x=1$ 时，原式 $=\dfrac{1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$；

当 $x=-1$ 时，原式 $=\dfrac{1}{-1+2}=1$.

基础巩固

1. C　**2.** C

3. C　[原式 $=\dfrac{x+2y}{x+y}\cdot\dfrac{3xy}{x+2y}=\dfrac{3xy}{x+y}$，当 $x=6,y=3$ 时，原式 $=\dfrac{3\times6\times3}{6+3}=6$.]

4. 1　**5.** 5

6. 解：(1) 原式 $=\dfrac{3(a+2)-(a-2)}{(a+2)(a-2)}\cdot(a+2)(a-2)=3a+6-a+2=2a+8$.

(2) 原式 $=\dfrac{x(x-4)+4}{x(x-2)}\cdot\dfrac{2x^2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{x^2-4x+4}{x(x-2)}\cdot\dfrac{2x^2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)}\cdot\dfrac{2x^2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{2x}{x+2}$.

7. 解：原式 $=\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x-1}\right)\cdot\dfrac{(x-1)^2}{x+1}=\dfrac{x+1}{x-1}\cdot\dfrac{(x-1)^2}{x+1}=x-1$. 当 $x=-\dfrac{1}{3}$ 时，原式 $=-\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{4}{3}$.

素养提升

8. 解：(1) $\because \dfrac{x}{x^2-3x+1}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{x^2-3x+1}{x}=2$，

$\therefore x-3+\dfrac{1}{x}=2$，

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=5$.

(2) $\because \dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2}=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=25$，

$\therefore \dfrac{x^2}{x^4+2x^2+1}=\dfrac{1}{25}$.

15.3 可化为一元一次方程的分式方程

第 1 课时 分式方程的解法

知识梳理

1. 分式　分母

2. 去分母　最简公分母　整式方程　检验

3. 分母　0

重难突破

1. 解：方程的两边同乘 $(x-2)$，得 $1-x+2(x-2)=-1$，解得 $x=2$.

检验：当 $x=2$ 时，$x-2=0$，

$\therefore x=2$ 为增根.

故原方程无解.

2. 解：(1)$x=2$

(2)将关于 x 的分式方程 $\frac{?}{x-2}+3=\frac{1}{2-x}$ 的两边都乘$(x-2)$，

得$?+3(x-2)=-1$，

把 $x=2$ 代入，得$?=-1$.

即"?"所代表的数为-1.

基础巩固

1. C　**2.** A　**3.** D

4. 22

5. 解：(1)去分母，得 $2(x-1)=x+1$，

解得 $x=3$，

经检验，$x=3$ 是分式方程的解.

(2)去分母，得 $3+x^2-x=x^2$，

解得$x=3$，

经检验，$x=3$ 是分式方程的解.

6. 解：(1)去分母，得 $1-m-2(x-1)=-2$.

当 $m=-2$ 时，$1+2-2(x-1)=-2$，

解得 $x=\frac{7}{2}$.

经检验，$x=\frac{7}{2}$是原方程的解. $\therefore x=\frac{7}{2}$.

(2)小明的结论正确，理由如下：

去分母，得 $1-m-2(x-1)=-2$，

当 $m=3$ 时，$1-3-2(x-1)=-2$，

解得 $x=1$，

经检验，$x=1$ 是原方程的增根，

$\therefore$原方程无解.

素养提升

7. 解：(1)$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

(2)$\because \frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2},\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots$，

以此类推，可得$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

$\therefore \frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

(3)由题意，得$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\cdots+\frac{1}{x+99}-\frac{1}{x+100}=\frac{100}{x+100}$，

$\therefore \frac{1}{x}-\frac{1}{x+100}=\frac{100}{x+100}$，分式两边同乘 $x(x+100)$，得 $x+100-x=100x$，解得 $x=1$，经检验，$x=1$ 是原方程的解，故原方程的解为$x=1$.

第 2 课时　分式方程的应用

知识梳理

1. (1)工作效率　工作时间　(2)售价

进价　单件的利润×销售的数量

(3)速度　时间

重难突破

解:设原计划每天铺设管道 x 米，则实际每天铺设管道 $(1+25\%)x=1.25x$ 米，

根据题意，得 $\frac{3\ 000}{1.25x}+15=\frac{3\ 000}{x}$，

解得 $x=40$，

经检验 $x=40$ 是分式方程的解，且符合题意.

$1.25\times40=50$(米)

答:原计划与实际每天铺设管道各为40米，50米.

基础巩固

1. B　**2.** B　**3.** A　**4.** D

5. 80　[设这辆汽车原来的速度是 x km/h，由题意列方程，得 $\frac{160}{x}-0.4=\frac{160}{x(1+25\%)}$，解得 $x=80$，经检验，$x=80$ 是原方程的解，且符合题意，所以这辆汽车原来的速度是 80 km/h.]

6. 其余师生乘汽车的速度是张老师骑自行车速度的3倍

7. 解:(1)①50　②$\frac{1}{6}$

(2)设港珠澳大桥开通后从香港到珠海的平均速度是 x 千米/小时，则港珠澳大桥开通前从香港到珠海的平均速度是 $(x-40)$ 千米/时，

根据题意，得 $\frac{50}{x}=\frac{180}{x-40}\times\frac{1}{6}$，

解得 $x=100$，

经检验，$x=100$ 是所列方程的解，且符合题意.

答:港珠澳大桥开通后从香港到珠海的平均速度是 100 千米/时.

素养提升

8. 解:(1)设 B 型汽车的进价为每辆 x 万元，则 A 型汽车的进价为每辆 $1.5x$ 万元，

依题意，得 $\frac{1\ 500}{1.5x}+20=\frac{1\ 200}{x}$，解得 $x=10$，经检验，$x=10$ 是方程的解，且符合题意，$\therefore 1.5\times10=15$(万元)，

答:A 型汽车的进价为每辆 15 万元，B 型汽车的进价为每辆 10 万元.

(2)设购买 m 辆 A 型汽车，则购买 $(100-m)$ 辆 B 型汽车，

依题意，得 $15m+10(100-m)\leqslant1\ 222$，

解得 $m\leqslant44.4$.

$\because m$ 为正整数，$\therefore m$ 最大为 44.

答:最多可以购买 44 辆 A 型汽车.

15.4　零指数幂与负整数指数幂

知识梳理

1. 1　1　**2.** 倒数　$\frac{1}{a^n}$

3. $a\times10^{-n}$　正整数　$1\leqslant\ \ <10$

重难突破

1. A　**2.** C　**3.** B

基础巩固

1. C **2.** D **3.** C **4.** D **5.** C **6.** D

7. 1 **8.** $x\neq4$ **9.** -3

10. 解:(1)原式$=2-1-8\div\frac{1}{3}=2-1-24=-23$.

(2)原式$=-1-(\sqrt{2}-1)+4\times1-2\sqrt{2}=-1-\sqrt{2}+1+4-2\sqrt{2}=4-3\sqrt{2}$.

素养提升

11. 解:(1)$\because\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$,$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$,

$\therefore\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$.

(2)$\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}$,$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^3}=\frac{1}{\frac{4}{5}}\times\frac{1}{\frac{4}{5}}\times\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}$,

$\therefore\left(\frac{5}{4}\right)^3=\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$.

(3)$\left(\frac{b}{a}\right)^{-m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m(ab\neq0)$.

章末复习课

1. D **2.** 2 **3.** C **4.** A **5.** B

6. 解:原式$=\left[\frac{2x}{x(x-1)}-\frac{x-1}{x(x-1)}\right]\div\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x+1}{x(x-1)}\cdot\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{x}$,

$\because x\neq0$ 且 $x\neq\pm1$,

$\therefore$当 $x=2$ 时,原式$=\frac{1}{2}$.

7. B **8.** $-\frac{3}{2}$ **9.** D

10. 20 [根据题意,得$\frac{2}{x+2}=\frac{5}{3x-5}$,

方程两边都乘$(x+2)(3x-5)$,得$2(3x-5)=5(x+2)$,

$\therefore6x-10=5x+10$,

$\therefore6x-5x=10+10$,$\therefore x=20$,

检验:当 $x=20$ 时,$(x+2)(3x-5)\neq0$,

所以分式方程的解是 $x=20$.]

11. 解:(1)原方程整理,得$\frac{5}{(x-1)(x+1)}-\frac{3}{x(x-1)}=0$,

$\therefore5x-3(x+1)=0$,解得 $x=\frac{3}{2}$,

经检验,$x=\frac{3}{2}$是原方程的解.

$\therefore$原方程的解是 $x=\frac{3}{2}$.

(2)$\frac{3}{x-3}-\frac{4}{x^2-9}=0$,

去分母,得 $3(x+3)-4=0$,

去括号,得 $3x+9-4=0$,

移项、合并同类项,得 $3x=-5$,

系数化为1,得 $x=-\frac{5}{3}$,

检验:把 $x=-\frac{5}{3}$ 代入 x^2-9,得$\left(-\frac{5}{3}\right)^2-9\neq0$,

$\therefore x=-\frac{5}{3}$是原方程的解.

章末评价检测(第15章)

1. C **2.** A **3.** C **4.** A **5.** B **6.** A

7. A **8.** A

9. -5 **10.** $x(x+2)(x-2)$

11. $\frac{bx}{x-a}$ [依题意,可知路长为 bx km,要提前 a 天完成,即现应修路$(x-a)$天,所以每天应修$\frac{bx}{x-a}$ km.]

12. -1 $-\frac{1}{6}$

13. 解:(1)$-1^2+(2\ 026-3.14)^0-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}=-1+1-4=-4$.

(2)原式$=\frac{a+2-3}{a+2}\cdot\frac{(a-2)(a+2)}{(a-1)^2}=\frac{a-2}{a-1}$,

将 $a=-1$ 代入,得原式$=\frac{3}{2}$.

14. 证明:$\frac{a}{4a+b}=\frac{b}{a+4b}$,

等式的两边同乘$(4a+b)(a+4b)$,得 $a(a+4b)=b(4a+b)$,

$a^2+4ab=4ab+b^2$,

$a^2+4ab-4ab-b^2=0$,

$a^2-b^2=0$,

$(a+b)(a-b)=0$.

$\because a>0,b>0,\therefore a+b\neq0$,

$\therefore a-b=0$,即 $a=b$.

15. 解:(1)设客车平均速度为 x 千米/时,则高铁平均速度为 $3x$ 千米/时,由题意,得$\frac{480}{x}-\frac{480}{3x}=4$,解得 $x=80$,

经检验,$x=80$ 是原分式方程的解,且符合题意,

$\therefore 3x=3\times80=240$,

答:高铁的平均速度为 240 千米/时.

(2)$360\div240=1.5$(小时),

$1.5+1.5=3$(小时).

$\because$从 11 点 20 分开始 3 个小时后是 14 点 20 分,$\therefore$他能在开会之前到达会议地点.

第16章 函数及其图象

16.1 变量与函数

知识梳理

1. 变量 常量

2. 唯一的值 自变量 因变量 函数

4. 图象法 列表法 解析法

5. 取值范围

重难突破

1. D

2. 解:(1)汽车行驶时间 t 汽车油箱的剩余油量 Q

(2)82 6

(3)由表格,可知汽车一开始的油量为 100 升,每小时汽车耗油 6 升,则汽车油箱剩余油量和汽车行驶时间的关系为 $Q=100-6t$.

3. 解:(1)$y=2x-1$ 中,自变量的取值范围是全体实数.

(2)由题意,得 $x-3\geqslant0,5-x\geqslant0$,解得 $3\leqslant x\leqslant5$.

(3)由题意,得 $4-2x>0$,解得 $x<2$.

4. A

基础巩固

1. C　**2.** A　**3.** C　**4.** B

5. A　[由题意,得 $2(a+b)=8$,∴$b+a=4$,∴$b=4-a$,∴b 是 a 的函数,故①正确;∵$S=ab$,∴$S=a(8-a)=-a^2+8a$,∴S 是 a 的函数,故②正确;∵$-a^2+8a=S$,∴$a^2-8a=-S$,∴$a^2-8a+16=16-S$,∴$(a-4)^2=16-S$,∴$a-4=\pm\sqrt{16-S}$,∴$a=4\pm\sqrt{16-S}$,∴a 不是 S 的函数,故③不正确;所以,所有正确的结论的序号是①②.]

6. 3　x,y

7. $y=5x+1$

8. **解:**(1)常量是 4π,变量是 S,R.

(2)常量是 v_0,4.9,变量是 h,t.

(3)常量是$\frac{1}{2}$,g,变量是 h,t.

(4)常量是 1.8,变量是 x,w.

9. **解:**(1)彩纸链的长度 y(cm)与纸环数 x(个)满足的函数关系式为 $y=17x+2$.

(2)10 m=1 000 cm,根据题意,得 $17x+2\geqslant 1\ 000$.

解得 $x\geqslant 58\frac{12}{17}$,$59\times 2=118$(个).

答:至少需要用 118 个纸环.

素养提升

10. **解:**(1)$S=2x^2-8x+16$　[设线段 AC 的长为变量 x(cm).

∵线段 AB 的长为 4 cm,

∴$BC=(4-x)$cm,

∴两正方形的面积和 S 与线段 AC 的长 x 之间的关系式为$S=x^2+(4-x)^2=x^2+x^2-8x+16=2x^2-8x+16$.]

(2)当 $2<x<4$ 时,S 随 x 的增大而增大(答案不唯一)　8.5　10

[当 $x=1.5$ 时,$S=2\times 1.5^2-8\times 1.5+16=8.5$,当 $x=3$ 时,$S=2\times 3^2-8\times 3+16=10$,

完成表如下,

AC 的长 x(cm)	…	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	…
两正方形面积和 S(cm^2)	…	12.5	10	8.5	8	8.5	10	12.5	…

∴S 随 x 变化的变化规律为:当 $2<x<4$ 时,S 随 x 的增大而增大.(答案不唯一)]

16.2　函数的图象

1. 平面直角坐标系

知识梳理

1. 垂直　原点　一一对应

2. $(+,+)$　$(-,+)$　$(-,-)$　$(+,-)$

3. 0　0

4. $x=y$　$x=-y$

5. $(a,-b)$　$(-a,b)$　$(-a,-b)$

重难突破

1. **解:**$A(-3,4)$,$B(-3,-2)$,$C(3,-4)$,$D(3,2)$,$E(3,0)$,$F(-4,0)$,$G(0,3)$,$H(0,0)$,点 A 和点 C 关于原点对称,点 B 和点 D 关于原点对称.

2. **解:**(1)∵点 A 在 y 轴上,

∴$3a-5=0$,解得 $a=\frac{5}{3}$,

$\therefore a+1=\frac{8}{3}$，∴点 A 的坐标为$\left(0,\frac{8}{3}\right)$.

(2)∵点 A 到 x 轴的距离与到 y 轴的距离相等，

$\therefore |3a-5|=|a+1|$，

①当 $3a-5=a+1$ 时，解得 $a=3$，则点 $A(4,4)$；

②当 $3a-5+(a+1)=0$ 时，解得 $a=1$，则点 $A(-2,2)$；

所以 $a=3$，则点 $A(4,4)$ 或 $a=1$，则点 $A(-2,2)$.

基础巩固

1. A　**2.** A　**3.** B　**4.** D　**5.** A　**6.** D

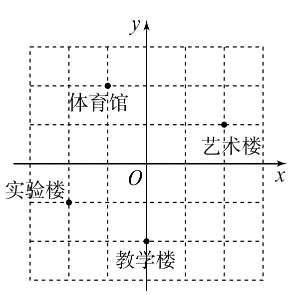
7. D　**8.** C

9. $(-4,-5)$　**10.** 三

11. $(1,2)$或$(-7,2)$　[在平面直角坐标系中，与 x 轴平行的直线上点的纵坐标相同，所以点 B 的纵坐标为 2；当点 B 在点 A 左侧时，点 B 的横坐标为 -7，当点 B 在点 A 右侧时，点 B 的横坐标为 1，所以点 B 的坐标为$(1,2)$或$(-7,2)$.]

12. 解：(1)1　-2

(2)坐标系如图：



教学楼的坐标为$(0,-2)$，体育馆的坐标为$(-1,2)$.

素养提升

13. 解：(1)∵点 P 在 y 轴上，

$\therefore 2m+4=0$，解得 $m=-2$，

$\therefore m-1=-3$，则 P 点坐标为$(0,-3)$.

(2)∵点 P 在 x 轴上，$\therefore m-1=0$，解得 $m=1$，

$\therefore 2m+4=6$，则 P 点坐标为$(6,0)$.

(3)∵点 P 的横坐标比纵坐标大 1，

$\therefore m-1=(2m+4)-1$，解得 $m=-4$，

$\therefore 2m+4=-4$，$m-1=-5$，则点 P 的坐标为$(-4,-5)$.

2. 函数的图象

知识梳理

1. 列表　描点　连线

2. 一对对应值　自变量　函数值

重难突破

1. 解：(1)是　$0.5\leqslant h\leqslant 1.5$　[由函数的定义，结合题图，可知变量 h 是关于 t 的函数，变量 h 的取值范围是 $0.5\leqslant h\leqslant 1.5$.]

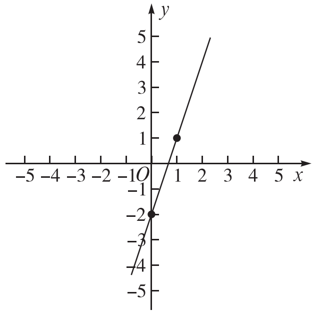
(2)①0.5 m　摆动时间为 0.7 s 时，秋千离地面的高度是0.5 m.

②从最高点开始向前和向后，再返回到最高点，为一个来回，由图象，可知秋千摆动第二个来回需要的时长为 $5.4-2.8=2.6$ s.

2. 解：列表如下：

x	…	0	1	…
$y=3x-2$	…	-2	1	…

描点、连线、画函数图象如图所示.



基础巩固

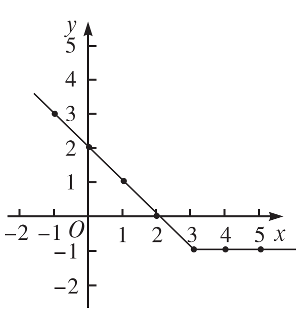
1. A　**2.** D

3. C　[由图1,可知当 $3<t<9$ 时,水深 h 随着 t 的增大而减小.故A正确,不符合题意.当 $t=9$ 时,纵坐标值最小,该港口水深最浅.故B正确,不符合题意.由图1可以看出,当 $h=6$ 时,$t=1$ 或 $t=5$.故C不正确,符合题意.该货船吃水深度为3 m,而且由图2信息窗可知,船舶进出港口时船底与港口水底间的距离不能少于2 m,故该货船进出港口时要求水深最少为 $3+2=5$(m).而当 $t=7$ 时,$h=4$,$4<5$,故此时它不可以进出港口.故D正确,不符合题意.]

4. 解:(1)填表;

x	…	-1	0	1	2	3	4	5	6	…
y	…	3	2	1	0	-1	-1	-1	-1	…

(2)如图,建立平面直角坐标系画出函数 $y=\dfrac{|x-3|-x+1}{2}$ 的图象如下.



5. 解:(1)甲下午1时出发,乙下午2时出发,所以甲出发得更早,早出发1小时.

(2)甲5时到达,乙3时到达,所以乙更早到达 B 地,早到2小时.

(3)乙骑摩托车的速度为 $\dfrac{50}{3-2}=50$(千米/时),

甲骑自行车的平均速度为 $\dfrac{50}{5-1}=12.5$(千米/时).

(4)设乙出发后 x 小时就追上甲,

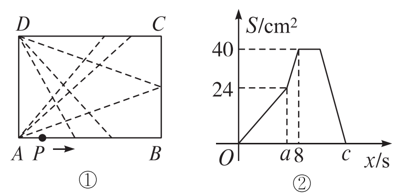
根据题意,得 $50x=20+10x$,

解得 $x=0.5$.

答:乙出发后0.5小时就追上甲.

素养提升

6. 解:(1)增大　不变　减小　[当点 P 在 AB 上运动时,$\triangle APD$ 的面积会增大,因为三角形高不变,底边增大;点 P 在 BC 上运动时,$\triangle APD$ 的面积不变,因为此时三角形等底同高;点 P 在 CD 上运动时,$\triangle APD$ 面积会减小,因为高不变,底边缩小.



]

(2)由图象,可知当 $x=a$ 时,P 在 AB 上,$\therefore S=24=\dfrac{1}{2}\times 8AP$,$\therefore AP=6$,

$\therefore a=6$,也就是 P 在 AB 上移动到了6 cm,$\therefore$所剩部分为4 cm.

$\because$当 $x=8$ 时,S 为40,且面积不再发生

变化，∴P点到B点用了2秒，距离是4 cm，

∴$b=2$ cm/s，

∴$c=18\div2+8=17$(s).

(3)由(2)，得$y=6+2(x-6)=2x-6$.

(4)分两种情况：①当点P在AB边上时，根据题意判断此时P的速度为1 cm/s，∴$\frac{1}{2}\times8\times x=\frac{1}{4}\times10\times8$，

∴$x=5$；

②当点P在CD边上时，根据题意，得$\frac{1}{2}\times8\times[10+10+8-(2x-6)]=\frac{1}{4}\times10\times8$，∴$x=\frac{29}{2}$.

答：当点P出发后5 s或$\frac{29}{2}$ s时，$\triangle APD$的面积S是长方形$ABCD$面积的$\frac{1}{4}$.

16.3　一次函数

1. 一次函数

知识梳理

$y=kx+b$　0　正比例函数

重难突破

1. 解：函数$y=\frac{2x-4}{4}$是一次函数.

理由：∵$y=\frac{2x-4}{4}=\frac{1}{2}x-1$，

∴属于一次函数，其中$k=\frac{1}{2}$，$b=-1$.

2. 解：(1)上述两个变量之间的关系中，碗的数量是自变量，高度是因变量.

(2)设这摞碗的数量为x，这摞碗的高度为y.

由表格，可知增加1只碗，高度增加1.2 cm，

∴$y=4+1.2(x-1)=2.8+1.2x$，

∴当$x=7$时，$y=2.8+1.2\times7=11.2$(cm)，

∴当碗的数量为7时，这摞碗的高度是11.2 cm.

基础巩固

1. D　**2.** C　**3.** C　**4.** D　**5.** B

6. C　[当$x=a$时，$y=ka+3$，当$x=a+2$时，$y=k(a+2)+3$. ∵$ka+3-[k(a+2)+3]=2$，∴$ka+3-(ka+2k+3)=2$，∴$-2k=2$，∴$k=-1$.]

7. $\neq-1$

8. $y=-3x$　[根据题意，特征数为$[t,t+3]$的一次函数表达式为$y=tx+(t+3)$. 因为此一次函数为正比例函数，所以$t+3=0$，解得$t=-3$. 故正比例函数为$y=-3x$.]

9. 解：(1)∵蚊香的长等于蚊香的原长减去燃烧的长度，

∴$y=105-10t$.

(2)∵蚊香燃尽的时候蚊香的长度$y=0$，

∴$105-10t=0$，解得$t=10.5$，

∴该蚊香可燃烧10.5 h.

10. 解：(1)由$y=(m-2)x^{3-|m|}+m+7$是一次函数，得

$\begin{cases}3-|m|=1,\\m-2\neq0,\end{cases}$解得$m=-2$.

故当 $m=-2$ 时，$y=(m-2)x^{3-|m|}+m+7$ 是一次函数.

(2)当 $y=3$ 时，$3=-4x+5$，

解得 $x=\frac{1}{2}$，故当 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 的值为 3.

素养提升

11. 解:(1)当 $x\leqslant20$ 时，$y=2.5x$；当 $x>20$ 时，$y=3.3(x-20)+50=3.3x-16$.

(2)∵该户 4 月份水费平均为每吨 2.8 元，∴该户 4 月份用水超过 20 吨.

设该户 4 月份用水 a 吨，

得 $2.8a=3.3a-16$，解得 $a=32$.

答:该户 4 月份用水 32 吨.

2. 一次函数的图象

知识梳理

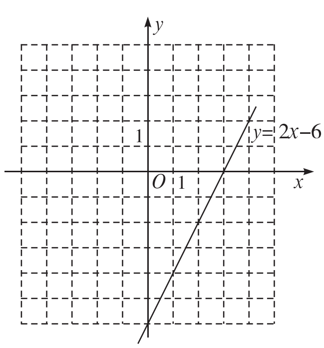
1. 直线　原点 $O(0,0)$

3. $>$　$<$　一次项系数相等

重难突破

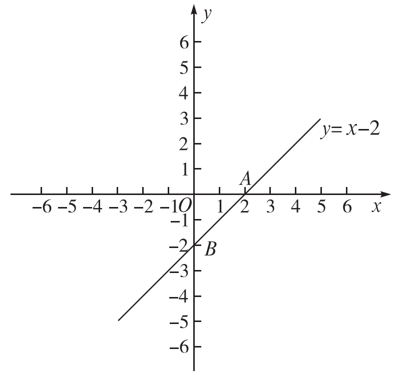
1. 解:(1)-6　3

(2)函数图象如图所示：



2. 解:画出 $y=x-2$ 的图象如图所示：

在 $y=x-2$ 时，令 $x=0$，则 $y=-2$；令 $y=0$，则 $x=2$；故 $A(2,0)$，$B(0,-2)$.



由图象，可知△AOB 为直角三角形，其中 $OA=OB=2$，

∴$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times2\times2=2$.

基础巩固

1. C　**2.** B　**3.** C　**4.** D　**5.** A

6. -2(答案不唯一)　**7.** 6

8. 25　[∵一次函数 $y=x+5$ 的图象经过点 $P(a,b)$ 和 $Q(m,n)$，∴$b=a+5$，$n=m+5$，∴$b-a=5$，$n-m=5$，原式$=a\times(-5)+5b=5(b-a)=5\times5=25$.]

9. 解:(1)在函数 $y=x+1$ 中，当 $y=0$ 时，则有 $x+1=0$，

解得 $x=-1$，∴点 A 的坐标为$(-1,0)$；

在函数 $y=-2x+4$ 中，当 $y=0$ 时，则有 $-2x+4=0$，

解得 $x=2$，∴点 B 的坐标为$(2,0)$；

联立，得 $\begin{cases}y=x+1,\\y=-2x+4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$

∴点 P 的坐标为$(1,2)$.

(2)在 $y=x+1$ 中，当 $x=0$ 时，则有 $y=1$，

∴点 Q 的坐标为 $(0,1)$，

则 $S_{四边形PQOB}=S_{\triangle ABP}-S_{\triangle AOQ}=\frac{1}{2}\times(2+1)\times2-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{5}{2}$.

素养提升

10. 解：(1)令 $y=0$，得 $-\frac{4}{3}x+4=0$，解得 $x=3$. 则 A 点的坐标为 $(3,0)$.

(2)令 $x=0$，得 $y=4$，则 B 点的坐标为 $(0,4)$，∴$AB=5$，

①$BA=BC$，$t=(12-4-5)\div1=3$(秒)或 $t=(12-4+5)\div1=13$(秒)；

②$CB=CA$，$(5\div2)\times5\div4=\frac{25}{8}$，$t=\left(12-4+\frac{25}{8}\right)\div1=11\frac{1}{8}$(秒)；

③$AB=AC$，$(12+4)\div1=16$(秒).

综上所述，点 C 运动所有的时间 t 分别是 3 秒、13 秒、$11\frac{1}{8}$秒、16 秒.

3. 一次函数的性质

知识梳理

1. (1)增大　上升　(2)减小　下降

2. 正　负

重难突破

解：(1)∵一次函数 $y=(4-k)x-2k^2+32$ 的图象经过原点，∴$-2k^2+32=0$，$4-k\neq0$，解得 $k=-4$.

(2)∵一次函数 $y=(4-k)x-2k^2+32$ 的图象经过 $(0,-2)$，

∴$-2k^2+32=-2$，$4-k\neq0$，

解得 $k=\pm\sqrt{17}$.

(3)∵一次函数 $y=(4-k)x-2k^2+32$ 的图象平行于直线 $y=-x$，

∴$4-k=-1$，∴$k=5$.

(4)∵一次函数 $y=(4-k)x-2k^2+32$ 中 y 随 x 的增大而减小，∴$4-k<0$，

∴$k>4$.

基础巩固

1. A　**2.** C

3. A　[∵一次函数 $y=kx-m-2x$ 的图象与 y 轴的负半轴相交，且函数值 y 随自变量 x 的增大而减小，∴$k-2<0$，$-m<0$，∴$k<2$，$m>0$.]

4. B

5. 二

6. $m<3$　**7.** $m<-1$

8. 解：(1)∵点 $P(a,b)$ 在第二象限，

∴$a<0$，$b>0$，

∴直线 $y=ax+b$ 经过第一、二、四象限.

(2)∵$ab<0$，且 y 随 x 的增大而增大，

∴$a>0$，$b<0$，

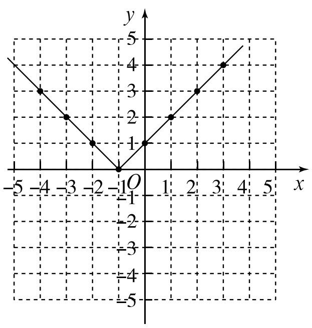
∴函数 $y=ax+b$ 的图象经过第一、三、四象限，

∴函数 $y=ax+b$ 的图象不经过第二象限.

素养提升

9. 解：(1)任意实数　①当 $x=1$ 时，$m=|1+1|=2$，即 m 的值是 2；

②如图所示：



(2)由函数图象，可得当 $x<-1$ 时，y 随 x 的增大而减小；

当 $x>-1$ 时，y 随 x 的增大而增大.

4. 求一次函数的表达式

知识梳理

$y=kx+b(k\neq0)$　方程或方程组

重难突破

1. 解：(1)∵点 $A(2,m)$ 在直线 $y=4x-5$ 上，

∴$m=4\times2-5=3$，

∴点 A 的坐标为 $(2,3)$.

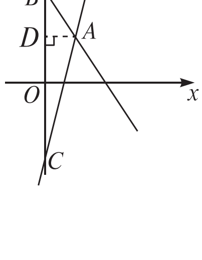
设直线 AB 的函数表达式为 $y=kx+b$.

将点 $A(2,3)$，点 $B(0,6)$ 代入，得

$\begin{cases}2k+b=3,\\b=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{3}{2},\\b=6,\end{cases}$

∴直线 AB 的函数表达式为 $y=-\dfrac{3}{2}x+6$.

(2)过点 A 作 $AD\perp y$ 轴于点 D，如图.



∵点 A 的坐标为 $(2,3)$，点 B 的坐标为 $(0,6)$，

∴$AD=2$，$OB=6$.

对于函数 $y=4x-5$，当 $x=0$ 时，$y=-5$，

∴点 C 的坐标为 $(0,-5)$，∴$OC=5$，

∴$BC=OB+OC=6+5=11$，

∴$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AD=\dfrac{1}{2}\times11\times2=11$.

2. 解：(1)甲无人机的速度是 $36\div6=6$(米/秒)，乙无人机的速度是 $(72-12)\div20=3$(米/秒).

(2)甲无人机飞行 PQ 段用时 $(72-36)\div6=6$(秒)，$20-6=14$(秒)，

∴点 P 的坐标为 $(14,36)$.

设线段 PQ 对应的函数表达式为 $y=kx+b$(k、b 为常数，且 $k\neq0$)，

将点 $P(14,36)$，$Q(20,72)$ 分别代入 $y=kx+b$，得

$\begin{cases}14k+b=36,\\20k+b=72,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=6,\\b=-48,\end{cases}$

∴线段 PQ 对应的函数表达式为 $y=6x-48(14\leqslant x\leqslant20)$.

(3)设乙无人机所在的位置距离地面的高度 y 与飞行的时间 x 之间的函数表达式为 $y=k'x+b'$，

将点 $(0,12)$，$(20,72)$ 代入，得

$\begin{cases}20k'+b'=72,\\b'=12,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k'=3,\\b'=12,\end{cases}$

∴乙无人机所在的位置距离地面的高度 y 与飞行的时间 x 之间的函数表达

式为 $y=3x+12(0\leqslant x\leqslant 20)$.

当甲无人机在完成独立表演动作后继续上升时，$14\leqslant x\leqslant 20$，

由与乙无人机的高度差为 9 米，得 $3x+12-(6x-48)=9$，

解得 $x=17$，

∴当甲无人机在完成独立表演动作后继续上升时，与乙无人机的高度差为 9 米时的时间为 17 秒.

基础巩固

1. B **2.** D **3.** C **4.** D

5. $y=-x+2$ ［设一次函数的表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，∵y 随 x 的增大而减小，∴$k<0$. 令 $k=-1$，则函数表达式为 $y=-x+b$，又∵点 $(0,2)$ 在一次函数 $y=-x+b$ 的图象上，∴$2=b$，∴一次函数的表达式为 $y=-x+2$.（答案不唯一）.］

6. $L=0.6x+15$ ［设弹簧总长度 L(cm) 与所挂物体质量 x(kg) 之间符合的一次函数关系式为 $L=kx+15(k\neq 0)$. 由题意，得 $16.8=3k+15$，解得 $k=0.6$，所以该一次函数表达式为 $L=0.6x+15$.］

7. 2 或 -2 ［∵一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$，当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，$-3\leqslant y\leqslant 5$，

∴下面两种情况讨论：

①当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，

则 $x=-2$ 时，$y=-3$，$x=2$ 时，$y=5$，

∴$\begin{cases}-2k+b=-3,\\2k+b=5,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=2,\\b=1,\end{cases}$ ∴$kb=2\times 1=2$；

②当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小，

即 $x=-2$ 时，$y=5$，$x=2$ 时，$y=-3$，

∴$\begin{cases}-2k+b=5,\\2k+b=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=1,\end{cases}$

∴$kb=(-2)\times 1=-2$；

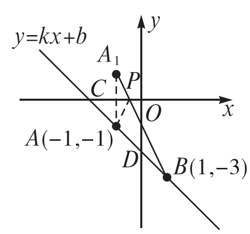
即 $kb=2$ 或 -2.］

8. 解：(1) 把点 $A(-1,-1)$，$B(1,-3)$ 代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}-k+b=-1,\\k+b=-3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=-2,\end{cases}$

∴一次函数的表达式为 $y=-x-2$.

(2) 如图，设直线与 x 轴交于点 C，与 y 轴交于点 D.



把 $y=0$ 代入 $y=-x-2$，

解得 $x=-2$，

∴$OC=2$.

把 $x=0$ 代入 $y=-x-2$，

解得 $y=-2$，∴$OD=2$，

∴$S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}\times OC\times OD=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$.

(3) 作点 A 与 A_1 关于 x 轴对称，连结 A_1B 交 x 轴于点 P，则点 P 即为所求.

由对称，知点 A_1 的坐标为 $(-1,1)$.

设直线 A_1B 的表达式为 $y=ax+c$，将点 $A_1(-1,1)$，$B(1,-3)$ 代入，

得 $\begin{cases}-a+c=1,\\a+c=-3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-2,\\c=-1,\end{cases}$ $\therefore y=-2x-1$.

令 $y=0$，得 $-2x-1=0$，

解得 $x=-\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

素养提升

9. **解**：(1)设 $y_1=k_1x(k_1\neq0)$，由题意，代入点(60，4 800)，得

$60k_1=4\ 800$，解得 $k_1=80$，

$\therefore y_1=80x$.

设 $y_2=k_2x+b(k_2\neq0)$，由题意，代入点(20，4 800)，(60，0)，得

$\begin{cases}20k_2+b=4\ 800,\\60k_2+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_2=-120,\\b=7\ 200,\end{cases}$

$\therefore y_2=-120x+7\ 200$.

答：$y_1=80x$，其中自变量 x 的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant60$，

$y_2=-120x+7\ 200$，其中自变量 x 的取值范围是 $20\leqslant x\leqslant60$；

(2)由题意，可知 $y_1=y_2$，即 $80x=-120x+7\ 200$，

解得 $x=36$，$\therefore y_2=-120\times36+7\ 200=2\ 880$.

答：甲出发后 36 分钟两人相遇，相遇时乙离 A 地 2 880 米.

16.4　反比例函数

1. 反比例函数

知识梳理

1. $y=\frac{k}{x}$　常数　**2.** 待定系数法　k

重难突破

1. -1

2. (1)**解**：$\because y$ 是 z 的反比例函数，$\therefore$ 设 $y=\frac{a}{z}(a\neq0)$.

$\because$ 当 $z=-\frac{2}{3}$ 时，$y=6$，

$\therefore a=6\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-4$，$\therefore y=-\frac{4}{z}$，①

$\because z$ 是 x 的正比例函数，$\therefore$ 设 $z=bx(b\neq0)$.

又 $\because$ 当 $x=6$ 时，$z=4$，$\therefore b=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，

$\therefore z=\frac{2}{3}x$，②

将②代入①，得 $y=-\frac{6}{x}$.

(2)证明：由(1)，得 $y=\frac{a}{z}(a\neq0)$，$z=bx(b\neq0)$，$\therefore y=\frac{a}{bx}(a\neq0,b\neq0)$，

$\therefore y$ 是 x 的反比例函数.

基础巩固

1. D　**2.** D　**3.** D　**4.** D　**5.** C

6. $\sqrt{2}$

7. 2　[$\because y=(k+1)x^{|k|-3}$ 是反比例函数，且正比例函数 $y=kx$ 的图象经过第一、

三象限，$\therefore\begin{cases}|k|-3=-1,\\k+1\neq0,\\k>0,\end{cases}$ $\therefore k=2.$]

8. 解：(1)设反比例的表达式为 $y=\frac{k}{x}$(k为常数，$k\neq0$)，

把 $M(-2,1)$代入得 $k=-1\times2=-2$，

$\therefore$反比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{x}$.

(2)当 $y=\frac{2}{3}$时，$-\frac{2}{x}=\frac{2}{3}$，解得 $x=-3$.

素养提升

9. 解：设点 A 的坐标为$\left(a,\frac{1}{a}\right)$，则 $OA^2=a^2+\frac{1}{a^2}$，

设直线 OA 的表达式为 $y=mx(x>0)$.

由条件，可知$\frac{1}{a}=ma$，解得 $m=\frac{1}{a^2}$，

$\therefore y=\frac{1}{a^2}x$.

由于直线 OA 与 $y=\frac{k}{x}$交于点 B，

$\therefore$联立$\begin{cases}y=\frac{k}{x},\\y=\frac{1}{a^2}x,\end{cases}$解得 $x=a\sqrt{k}$(负值已舍去)，$\therefore y=\frac{\sqrt{k}}{a}$，

即点 B 的坐标为$\left(a\sqrt{k},\frac{\sqrt{k}}{a}\right)$，

$\therefore OB^2=\left(a\sqrt{k}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{k}}{a}\right)^2=k\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$.

$\because\frac{OA}{OB}=\frac{1}{3}$，$\therefore OB^2=9OA^2$，

即 $k\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=9\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$.

$\because a^2+\frac{1}{a^2}>0$，$\therefore k=9$，

$\therefore$反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的表达式为$y=\frac{9}{x}$.

2. 反比例函数的图象和性质

知识梳理

1. 双曲线　中心对称　轴对称　坐标原点(0,0)

2. (1)一、三　下降　减小

(2)二、四　上升　增大

重难突破

1. D　**2.** D

基础巩固

1. A　**2.** B

3. D　[$\because$反比例函数的图象与经过原点的直线的两个交点一定关于原点对称，$\therefore$另一个交点的坐标与点(2,3)关于原点对称，$\therefore$该点的坐标为(−2,−3).]

4. B　**5.** B　**6.** B　**7.** B

8. 增大　[设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$，$\because$反比例函数图象过点(2,−3)，$\therefore$把(2,−3)代入得$-6=k<0$，根据反比例函数图象的性质可知它在每个象限内，y 随 x 的增大而增大.]

9. 4　[$\because$反比例函数 $y_1=\frac{k_1}{x}(x>0)$及 $y_2=\frac{k_2}{x}(x>0)$的图象均在第一象限内，$\therefore k_1>0$，$k_2>0$. $\because AP\perp x$ 轴，

$\therefore S_{\triangle OAP}=\frac{1}{2}k_1$，$S_{\triangle OBP}=\frac{1}{2}k_2$. $\therefore S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAP}-S_{\triangle OBP}=\frac{1}{2}(k_1-k_2)=2$，$\therefore k_1-k_2=4$.]

10. 解：(1)∵点 $A(1,2)$在这个函数的图象上，∴$k-1=1\times2$，解得 $k=3$.

(2)∵在函数 $y=\frac{k-1}{x}$图象的每一分支上，y 随 x 的增大而增大，∴$k-1<0$，解得 $k<1$.

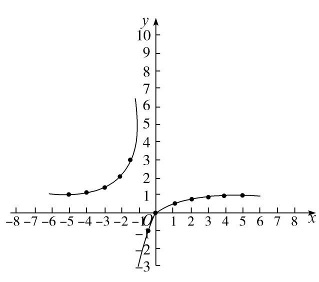
(3)∵$k=13$，∴$k-1=12$，∴该反比例函数的表达式为 $y=\frac{12}{x}$. 将点 B 的坐标代入 $y=\frac{12}{x}$，可知点 B 的坐标满足函数关系式，∴点 B 在函数 $y=\frac{12}{x}$的图象上；将点 C 的坐标代入 $y=\frac{12}{x}$，可知点 C 的坐标不满足函数关系式，∴点C 不在函数 $y=\frac{12}{x}$的图象上.

素养提升

11. 解：(1)$x\neq-1$　[$x+1\neq0$，$x\neq-1$.]

(2)3　[当 $y=\frac{x}{x+1}=\frac{3}{4}$时，$x=3$.]

(3)描点、连线，画出图象如图所示.



(4)观察函数图象发现：函数 $y=\frac{x}{x+1}$在 $x<-1$ 和 $x>-1$ 上均随 x 的增大而增大.

16.5　实践与探索

知识梳理

1. 关系式　方程　解　**2.** 表达式　解

3. $kx+b=0$

4. $\left(-\frac{b}{k},0\right)$　$x>-\frac{b}{k}$　$x<-\frac{b}{k}$

重难突破

1. 解：(1)∵$y_1=3x+1$，$y_2=x-3$，

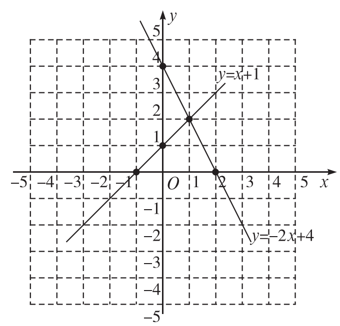
∴当 $y_1=y_2$ 时，$3x+1=x-3$，

解得$x=-2$.

(2)由(1)，可知点 P 的横坐标为-2，由图象，可知当 $x<-2$ 时，$y_1<y_2$.

2. 解：画出直线 $y=-2x+4$ 和直线 $y=x+1$，如图. 由图，可知它们的交点坐标为(1,2)，

所以方程组$\begin{cases}2x+y=4,\\x-y=-1\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$



3. 解：(1)由题意，得 $y_1=0.45x$；$y_2=0.15x+600$；$y_3=1\ 350$.

(2)解方程 $0.45x=0.15x+600$，得$x=2\ 000$，

$0.45\times 2\ 000=900$，故点 C 的坐标为 $(2\ 000,900)$；

解方程 $0.45x=1\ 350$，得 $x=3\ 000$，

故点 D 的坐标为 $(3\ 000,1\ 350)$；

解方程 $0.15x+600=1\ 350$，得 $x=5\ 000$，

故点 E 的坐标为 $(5\ 000,1\ 350)$；

由图象，可知当 $0<x\leqslant 2\ 000$ 时，采用方案一更合算；

当 $2\ 000<x\leqslant 5\ 000$ 时，采用方案二更合算；当 $x>5\ 000$ 时，采用方案三更合算.

基础巩固

1. D　**2.** B　**3.** C

4. B　[设销售收入 y（元）与销售量 x（万件）的关系式为 $y=kx+b$，由题意，得
$\begin{cases}8\ 000=k+b,\\13\ 000=2k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=5\ 000,\\b=3\ 000.\end{cases}$

$\therefore y=5\ 000x+3\ 000$，$\therefore$ 当 $x=0$ 时，$y=3\ 000$，

即营销人员没有销售量时的收入是 3 000 元.]

5. $x\leqslant 1$

6. 一　[$\because$ 一个长方形长为 x，宽为 y，其面积为 2，$\therefore xy=2$，

$\therefore y=\dfrac{2}{x}$，$\therefore y$ 是 x 的反比例函数，$\because x>0$，$y>0$，$\therefore$ 反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}(x>0)$ 的图象在第一象限.]

7. 解：(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 10$ 时，设 y 关于 x 的函数表达式为 $y=kx(k\neq 0)$，$10k=50$，得 $k=5$，

即当 $0\leqslant x\leqslant 10$ 时，y 关于 x 的函数表达式为 $y=5x$.

(2) 当 $10\leqslant x\leqslant 30$ 时，设 y 关于 x 的函数表达式为 $y=ax+b$，

$\begin{cases}10a+b=50,\\25a+b=80,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=30,\end{cases}$

即当 $10\leqslant x\leqslant 30$ 时，y 关于 x 的函数表达式为 $y=2x+30$，

当 $x=30$ 时，$y=2\times 30+30=90$，

$\because$ 线段 $BC\parallel x$ 轴，$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(60,90)$.

素养提升

8. 解：(1) 对于 $y=2x+4$，令 $x=0$，则 $y=4$；令 $y=2x+4=0$，则 $x=-2$，

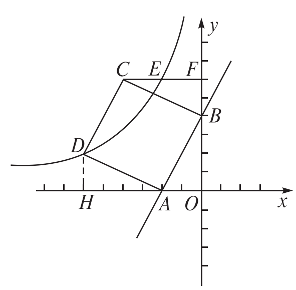
$\therefore$ 点 A，点 B 的坐标分别为 $(-2,0)$，$(0,4)$，

$\therefore OA=2$，$OB=4$，

$\therefore AB^2=OA^2+OB^2=20$，

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的面积 $=AB^2=20$.

(2) 过点 D 作 $DH\perp x$ 轴于点 H，如图.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB=AD$，$\angle DAB=90^\circ$，

$\therefore \angle DAH+\angle BAO=90°$.

$\because \angle BAO+\angle ABO=90°$,

$\therefore \angle DAH=\angle ABO$.

$\because \angle AHD=\angle BOA=90°$,

$\therefore \triangle AHD\cong\triangle BOA$(AAS),

$\therefore AH=BO=4,DH=OA=2$,

$\therefore OH=6$,$\therefore$点 $D(-6,2)$.

(3)同理(2),可得 $C(-4,6)$.

将点 D 的坐标代入反比例函数表达式,得 $k=-6\times2=-12$,

$\therefore$反比例函数的表达式为 $y=-\frac{12}{x}$.

$\because CF\perp y$ 轴,$\therefore$点 E 的纵坐标为 6.当 $y=6$ 时,即 $6=-\frac{12}{x}$,解得 $x=-2$,

$\therefore$点 $E(-2,6)$,$\therefore EF=2$.

章末复习课

1. A **2.** C

3. D [$\because$函数 $y=\begin{cases}x^2+2(x\leqslant2),\\2x(x>2),\end{cases}$

$\therefore$把 $y=8$ 先代入 $y=x^2+2(x\leqslant2)$,得 $x=\pm\sqrt{6}$.$\because x\leqslant2$,

$\therefore x=\sqrt{6}$不合题意舍去,故 $x=-\sqrt{6}$.

再代入 $y=2x(x>2)$,得 $x=4$.

$\because x>2$,故 $x=4$ 符合题意,综上,x 的值为 4 或 $-\sqrt{6}$.]

4. **解:**(1)x 是任意实数.

(2)根据题意,得 $\begin{cases}x-2\geqslant0,\\x-3\neq0.\end{cases}$解得 $x\geqslant2$ 且 $x\neq3$;

(3)根据题意,得 $x-1\neq0$,解得 $x\neq1$.

5. C **6.** 5 **7.** (11,0)

8. A **9.** B

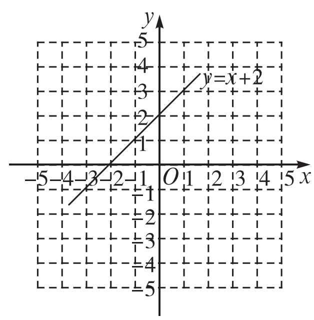
10. $y_1>y_2$ [$\because k=-1<0$,$\therefore y$ 随 x 的增大而减小.又$\because$点 $A(-1,y_1)$、$B(3,y_2)$在一次函数 $y=-x+2$ 的图象上,且 $-1<3$,$\therefore y_1>y_2$.]

11. **解:**(1)$\because$一次函数 $y=x+2$ 的图象与 x 轴交于点 A,与 y 轴交于点 B,

$\therefore$当 $x=0$ 时,$y=2$,即点 B 的坐标为 $(0,2)$;

当 $y=0$ 时,由 $0=x+2$,得 $x=-2$,即点 A 的坐标为 $(-2,0)$;

(2)描点、连线可得函数图象如图;

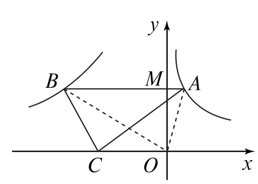


(3)当 $y=3$ 时,由 $3=x+2$,得 $x=1$,

当 $y=0$ 时,由 $0=x+2$,得 $x=-2$,

由图象,得当 $0<y<3$ 时,x 的取值范围为 $-2<x<1$.

12. D [如图,连结 OA、OB,设 AB 与 y 轴交于点 M,



$\because AB /\!/ x$ 轴，点 A 在曲线 $y_1=\frac{2}{x}(x>0)$ 上，点 B 在曲线 $y_2=\frac{k}{x}(x<0)$ 上，

$\therefore S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}\times|2|=1, S_{\triangle BOM}=\frac{1}{2}\times|k|=-\frac{1}{2}k$，

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}=6, \therefore 1-\frac{1}{2}k=6$，

$\therefore k=-10$.]

13. 160 **14.** C **15.** 64 **16.** $x>2$

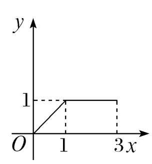
17. $\begin{cases}x=-4,\\y=-2\end{cases}$ [$\because$函数 $y=ax+b$ 和 $y=kx$ 的图象交于点 $P(-4,-2)$，

$\therefore$关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}y-ax=b,\\kx-y=0\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=-4,\\y=-2.\end{cases}$]

章末评价检测(第16章)

1. C **2.** D **3.** C **4.** B **5.** B **6.** C **7.** D

8. B [从点 B 到点 C，$\triangle ABP$ 的面积 y 与点 P 运动的路程 x 之间的函数关系是 $y=x(0\leqslant x\leqslant 1)$；因为从点 C 到点 D，$\triangle ABP$ 的面积一定：$2\times1\div2=1$，所以 y 与点 P 运动的路程 x 之间的函数关系是 $y=1(1\leqslant x\leqslant 3)$，所以 $\triangle ABP$ 的面积y 与点 P 运动的路程 x 之间的函数图象大致如图.]

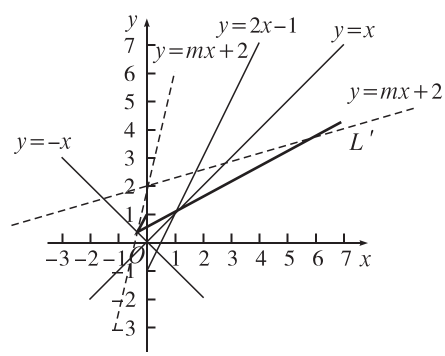


9. $k>2$ **10.** $(3,-6)$

11. $m-6\leqslant b\leqslant m-4$ [$\because$点 A、B 的坐标分别为 $(3,m)$、$(3,m+2)$，$\therefore$线段 $AB /\!/ y$ 轴，当直线 $y=2x+b$ 经过点 A 时，$6+b=m$，则 $b=m-6$；当直线 $y=2x+b$ 经过点 B 时，$6+b=m+2$，则 $b=m-4$；若直线 $y=2x+b$ 与线段 AB 有公共点，则 b 的取值范围为 $m-6\leqslant b\leqslant m-4$.]

12. $A'\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ $m=5$ 或 $m\leqslant\frac{2}{7}$ [$\because \frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}<0, \therefore A'\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$；

作直线 $y=2x-1$，直线 $y=x$，直线 $y=-x$，如图.



根据对称的坐标变化，可得图中粗线部分即为新图象 L'，

$\therefore$图象 L'右侧端点为 $(7,4)$，左侧端点为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，与 y 轴交点分别为 $(0,1)$ 和 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore$当直线 $y=mx+2$ 经过 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 时，有且只有一个交点，当直线 $y=mx+2$，在右端点 $(7,4)$ 和点 $(0,1)$ 之间时，有且只有一个交点，

$\therefore \frac{1}{3}=-\frac{1}{3}m+2, 4=7m+2$,

解得 $m=5$ 或 $m=\frac{2}{7}$，$\therefore m$ 的取值范围为 $m=5$ 或 $m\leqslant\frac{2}{7}$.]

13. 解:(1)依题意,得 $y=12-2x$,

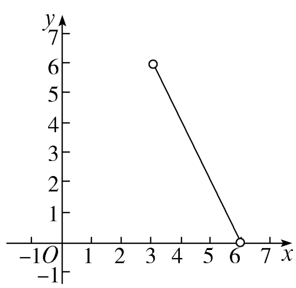
故 y 与 x 的函数关系式为 $y=12-2x$.

(2)依题意,得 $\begin{cases}2x>y,\\x+y>x,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2x>12-2x,\\12-2x>0,\end{cases}$ 解得 $3<x<6$.

故自变量 x 的取值范围为 $3<x<6$.

(3)在平面直角坐标系中将其画出来,如图所示.



14. 解:(1)-5 [当输入的 x 值为 -3 时,输出的 y 值为 $y=2x+1=2\times(-3)+1=-5$]

(2)将(7,10),(5,4)代入 $y=kx+b$,

得 $\begin{cases}7k+b=10,\\5k+b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=3,\\b=-11.\end{cases}$

(3)当 $x<3$ 时,把 $y=6$ 代入 $y=2x+1$,得 $2x+1=6$,解得 $x=\frac{5}{2}$,符合题意;当 $x\geqslant3$ 时,把 $y=6$ 代入 $y=3x-11$,

得 $3x-11=6$,解得 $x=\frac{17}{3}$,符合题意;

$\therefore$ 输出的 y 值为 6 时,输入的 x 值为 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{17}{3}$.

15. 解:(1)由题意,可得当 $x\geqslant3$ 时,$y=10+(x-3)\times2=2x+4$,

即当 $x\geqslant3$ 时,$y=2x+4$;

(2)将 $y=22$ 代入 $y=2x+4$,得 $22=2x+4$,解得 $x=9$,

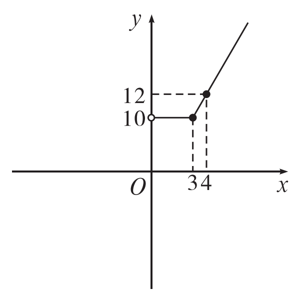
即若某人乘坐出租车付费 22 元,其行驶的路程为 9 千米;

(3)由题意,可得

当 $0<x<3$ 时,$y=10$,

由(1),可知当 $x\geqslant3$ 时,$y=2x+4$,此函数过点(3,10)和(4,12),

其函数图象如下所示.



16. 解:(1)连结 AO. $\because OC=2OD$,$\triangle ACD$ 的面积是 6,

$\therefore S_{\triangle AOC}=4$,$\therefore |k|=8$.

$\because$ 函数图象在第二象限,$\therefore k=-8$,

$\therefore$ 反比例函数表达式为 $y=-\frac{8}{x}$.

(2)$\because$ 点 $A(-2,m)$,$B(n,2)$ 在 $y=$

$-\frac{8}{x}$的图象上，

$\therefore A(-2,4),B(-4,2)$，

设直线 AB 的表达式为 $y=ax+b$，

$\begin{cases}-2a+b=4,\\-4a+b=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=6,\end{cases}$

$\therefore$直线 AB 的表达式为 $y=x+6$，

$\because AC/\!/y$ 轴交 x 轴于点 C，

$\therefore C(-2,0)$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times4\times2=4$.

设直线 AB 上在第一象限的点 $P(m,m+6)$，

$\therefore S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\times4\times(m+2)=2S_{\triangle ABC}=8$，

$\therefore 2m+4=8$，$\therefore m=2$，$\therefore P(2,8)$.

第 17 章　平行四边形

17.1　平行四边形的性质

知识梳理

1. 平行

2. 中心对称　轴对称　两条对角线的交点

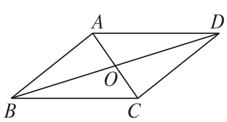
3. (1)平行　相等　(2)相等　互补

4. 互相平分

重难突破

1. B

2. B　[如图，∵四边形



$ABCD$ 是平行四边形，$\therefore OA=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times6=3$，$OD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times12=6$，$\therefore$边 AD 的长度 x 的取值范围是 $6-3<x<6+3$，即 $3<x<9$.]

3. 4　[$\because S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}=S_{\triangle ADC}$，$\therefore S_{\triangle ADC}-S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PAB}$，则 $S_{\triangle PAC}=S_{\triangle ACD}-S_{\triangle PCD}-S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PAD}=6-2=4$.]

基础巩固

1. B　**2.** C

3. D　[$\because AB=AC$，$\angle CAB=40°$，$\therefore \angle ABC=\angle ACB=70°$，∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore \angle ABC=\angle D=70°$.]

4. B　[∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore AB=CD=5$，$AB/\!/CD$，$AD=BC$，$\therefore AE=AB-BE=5-3=2$，$\angle CDE=\angle AED$，$\because DE$ 平分$\angle ADC$，$\therefore \angle CDE=\angle ADE$，$\therefore \angle ADE=\angle AED$，$\therefore BC=AD=AE=2$.]

5. A　[∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AB=DC$，$AB/\!/CD$，∴设 AB、CD 之间的距离为 h，则$\triangle CMD$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}DC\cdot h$，$\triangle ADM$ 的面积为 $S_1=\frac{1}{2}MA\cdot h$，$\triangle CBM$ 的面积为 $S_2=\frac{1}{2}BM\cdot h$，$\therefore S_1+S_2=\frac{1}{2}MA\cdot h+\frac{1}{2}BM\cdot h=\frac{1}{2}(MA+BM)\cdot h=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}CD\cdot h=S$，$\therefore S$、$S_1$、$S_2$ 的大小关系是 $S=S_1+S_2$.]

6. $70°$

7. 15 [∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD \parallel BC$，$OA=OC$，∴ $\angle EAO=\angle FCO$.

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$$\begin{cases}\angle EAO=\angle FCO,\\ OA=OC,\\ \angle AOE=\angle COF,\end{cases}$$

∴ $\triangle AOE \cong \triangle COF$（ASA），∴ $AE=CF$，$OE=OF=2$，∴ $EF=4$，

∴四边形 $ABFE$ 的周长 $=AE+AB+BF+EF=CF+AB+BF+EF=AB+BC+EF=5+6+4=15$.]

8. 解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，$AD \parallel BC$，

∴ $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D=180°$，

∵ $\angle A+\angle C=100°$，∴ $\angle A=\angle C=50°$，∴ $\angle B=\angle D=130°$.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB=CD$，$AD=BC$，

∵ $\square ABCD$ 的周长为 40 cm，

∴ $AB+BC=20$ cm，

∵ $AB-BC=6$ cm，∴ $AB=13$ cm，$BC=7$ cm，∴ $CD=13$ cm，$AD=7$ cm.

9. (1) **证明：**∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD \parallel BC$，$AB=CD$，

∴ $\angle AEB=\angle CBE$.

∵ BE 是 $\angle ABC$ 的平分线，

∴ $\angle ABE=\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC$，

∴ $\angle ABE=\angle AEB$，∴ $AE=AB$.

同理，可得 $DF=CD$，∴ $AE=DF$，

∴ $AE-EF=DF-EF$，即 $AF=DE$.

(2) **解：**∵ $AD=16$，∴ $AF+EF+DE=16$.

∵ $AF=DE$，$EF=12$，∴ $AF+12+AF=16$，

解得 $AF=2$，

∴ $AB=AE=AF+EF=2+12=14$，

∴ $\square ABCD$ 的周长为 $2(AB+AD)=2\times(14+16)=60$，即 $\square ABCD$ 的周长为 60.

素养提升

10. 解：(1) ∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $AD \parallel BC$，$AD=BC$，

∴ $\angle DAE=\angle AEB$.

∵ $AB=AE$，∴ $\angle AEB=\angle B$，

∴ $\angle B=\angle DAE$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EAD$ 中，

$$\begin{cases}AB=AE,\\ \angle B=\angle DAE,\\ AD=BC,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle EAD$（SAS）.

(2) ∵ $\triangle ABC \cong \triangle EAD$，

∴ $\angle AED=\angle BAC$.

∵ AE 平分 $\angle DAB$（已知），

∴ $\angle DAE=\angle BAE$.

又∵ $\angle DAE=\angle AEB=\angle B$，

∴ $\angle BAE=\angle AEB=\angle B$，

$\therefore \triangle ABE$ 为等边三角形，

$\therefore \angle BAE=60^\circ$.

$\because \angle EAC=25^\circ$，$\therefore \angle BAC=85^\circ$，

$\therefore \angle AED=85^\circ$.

17.2 平行四边形的判定

知识梳理

1. 平行 **2.** 相等 **3.** 平行 相等

4. 互相平分 **5.** 平行 等于

重难突破

1. B **2.** D

基础巩固

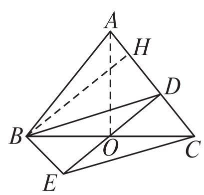
1. D **2.** D **3.** C

4. C ［甲：$\because OA=OC$，$OB=OD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故甲正确；乙：$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\therefore AD \parallel BC$，不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故乙不正确；丙：$\because AB=CD$，$AB \parallel CD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故丙正确.］

5. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

6. $DE=BF$（答案不唯一）

7. $\frac{24}{5}$ ［如图，当 BC 为四边形 $BECD$ 对角线，且 $DE\perp AC$ 时，DE 的值最小.设 DE 交 BC 于点 O，连结 AO，作 $BH\perp AC$ 于点 H.



$\because$ 四边形 $BDCE$ 是平行四边形，

$\therefore BO=CO$.

$\because BC=6$，$AB=AC=5$，

$\therefore AO\perp BC$，$\therefore BO=CO=\frac{1}{2}BC=3$.

在 $Rt\triangle AOB$ 中，$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

$\because \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BH=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AO$，

即 $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot BH=\frac{1}{2}\times 6\times 4$，

$\therefore BH=\frac{24}{5}$.

$\because BH\perp AC$，$DE\perp AC$，

$\therefore BH\parallel DE$. $\because BE\parallel DH$，

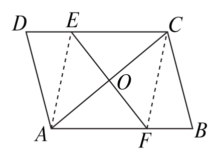
$\therefore$ 四边形 $BHDE$ 是平行四边形，

$\therefore DE=BH=\frac{24}{5}$.］

8. 解： 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

理由如下：

如图，连结 AE、CF.



$\because OE=OF$，$OA=OC$，

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

$\therefore EC\parallel AF$，$EC=AF$，

又 $\because DE=FB$，

$\therefore DC\parallel AB$，$DC=AB$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

素养提升

9. (1)**证明：** $\because BF=BE$，$CG=CE$，

$\therefore B$、C 分别为 EF、EG 的中点.

$\therefore BC$ 为 $\triangle FEG$ 的中位线，

$\therefore BC\parallel FG$，$BC=\frac{1}{2}FG$.

又∵H是FG的中点，∴$FH=\frac{1}{2}FG$，

∴$BC=FH$.

又∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AD/\!/BC$，$AD=BC$，

∴$AD/\!/FH$，$AD=FH$，

∴四边形$AFHD$是平行四边形.

(2)**解：**∵四边形$ABCD$是平行四边形，∴$\angle DAB=\angle DCB$.

∵$CE=CB$，∴$\angle BEC=\angle EBC=75°$，

∴$\angle BCE=180°-\angle EBC-\angle BEC=180°-75°-75°=30°$，

∴$\angle DCB=\angle DCE+\angle BCE=10°+30°=40°$，

∴$\angle DAB=40°$.

章末复习课

1. C　**2.** C　**3.** B　**4.** $\frac{16}{5}$

5. 证明：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$DA/\!/BC$，$DA=BC$.

∵$AE=CF$，∴$DA+AE=BC+CF$，即$DE=BF$.

∵$DA/\!/BC$，∴$DE/\!/BF$，

∴$\angle E=\angle F$，$\angle EDO=\angle FBO$.

在$\triangle EOD$和$\triangle FOB$中，

$\begin{cases}\angle E=\angle F,\\ DE=BF,\\ \angle EDO=\angle FBO,\end{cases}$

∴$\triangle EOD\cong\triangle FOB$(ASA)，

∴$OE=OF$.

6. C

7. 2　[由题意，知$\angle B=60°$，$\angle BAE=\angle BAC+\angle CAE=60°+60°=120°$，

∴$\angle B+\angle BAE=180°$，∴$AE/\!/BD$.

∵$AE=BC=CD$，

∴四边形$AECB$，$AEDC$是平行四边形.]

8. 证明：(1)∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AD=CB$，$\angle A=\angle C$.

在$\triangle ADE$和$\triangle CBF$中，$\begin{cases}AD=BC,\\ \angle A=\angle C,\\ AE=CF,\end{cases}$

∴$\triangle ADE\cong\triangle CBF$(SAS).

(2)∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AB=CD$，$AB/\!/CD$.

∵$AE=CF$，∴$BE=DF$，∴四边形$DEBF$是平行四边形.

9. (1)**证明：**∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AB/\!/CD$，$AB=CD$.

∵点E、F分别在BA、DC的延长线上，且$BE=DF$，

∴$AE/\!/CF$，$BE-AB=DF-CD$，即$AE=CF$，

∴四边形$EAFC$是平行四边形.

(2)∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AD/\!/BC$，∴$\angle BCF=\angle D=65°$.

∵四边形$EAFC$是平行四边形，

∴$\angle E=\angle F=65°$，

∴$\angle AHB=\angle CHF=180°-\angle F-\angle BCF=50°$.

10. 证明: ∵D、E分别是AB、AC的中点,

∴DE是$\triangle ABC$的中位线,

∴$DE/\!/BC,DE=\frac{1}{2}BC$,

∴$\angle DEO=\angle FCO$.

∵$CF=\frac{1}{2}BC$,∴$DE=FC$.

∵$\angle DOE=\angle FOC$,

∴$\triangle DOE\cong\triangle FOC$(AAS),

∴$OC=OE$.

章末评价检测(第17章)

1. C **2.** B **3.** A **4.** C **5.** C **6.** D **7.** C

8. D [∵四边形$PAQC$是平行四边形,∴$AQ=PC$,∴要求AQ的最小值,只要求PC的最小值即可.∵$\angle BAC=45°$,$AB=AC=8$,∴当$CP\perp AB$时,CP取得最小值,此时$CP=8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$.]

9. 105° **10.** 36 **11.** ①②③

12. 39 cm 60 cm^2 [∵BE、CE分别平分$\angle ABC$、$\angle BCD$,

∴$\angle 1=\angle 3=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle DCE=\angle BCE=\frac{1}{2}\angle BCD$.

∵四边形$ABCD$为平行四边形,

∴$AD=BC$,$AB=CD$,$AD/\!/BC$,$AB/\!/CD$,

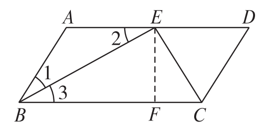
∴$\angle 2=\angle 3$,$\angle BCE=\angle CED$,$\angle ABC+\angle BCD=180°$,

∴$\angle 1=\angle 2$,$\angle DCE=\angle CED$,$\angle 3+\angle BCE=90°$,∴$AB=AE$,$CD=DE$,$\angle BEC=90°$,∴$AE=DE=\frac{1}{2}AD$.

在直角三角形BCE中,根据勾股定理,得$BC=13$ cm,

∴平行四边形的周长为$AB+BC+CD+AD=6.5+13+6.5+13=39$(cm).

如图,作$EF\perp BC$于F.根据直角三角形的面积公式,



得$EF=\frac{BE\cdot CE}{BC}=\frac{60}{13}$(cm),所以平行四边形的面积$=\frac{60}{13}\times13=60(cm^2)$.

故答案为39 cm,60 cm^2.]

13. 证明: ∵四边形$ABCD$是平行四边形,

∴$AD=BC$,$AD/\!/BC$,

∴$\angle EAO=\angle FCO$,$\angle OEA=\angle OFC$,

∵点O为对角线AC的中点,∴$AO=CO$,在$\triangle AOE$和$\triangle COF$中,

$\begin{cases}\angle EAO=\angle FCO,\\ \angle OEA=\angle OFC,\\ AO=CO,\end{cases}$ ∴$\triangle AOE\cong\triangle COF$,

∴$AE=CF$,∴$AD-AE=BC-CF$,

∴$DE=BF$.

14. 解: ∵四边形$ABCD$是平行四边形,点E在AD的延长线上,

∴$AD=BC=1$,$DE/\!/BC$.

∵$CE/\!/BD$,

∴四边形$DBCE$是平行四边形,

$\therefore DE=BC=1,\therefore AE=AD+DE=2.$

$\because EF\perp AB$ 交 BA 的延长线于点 F，

$\therefore \angle F=90^\circ.$

$\because \angle FAE=\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore \angle AEF=90^\circ-\angle FAE=30^\circ$，

$\therefore AF=\frac{1}{2}AE=1$，

$\therefore EF=\sqrt{AE^2-AF^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore EF$ 的长为 $\sqrt{3}$.

15. (1)**证明**：$\because \angle ACB=\angle CAD=90^\circ$，

$\therefore AD\parallel BC.$

$\because AE\parallel DC$，

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 是平行四边形.

(2)**解**：由(1)，已知四边形 $AECD$ 是平行四边形，$\therefore EC=AD.$

$\because AE$ 平分 $\angle BAC$，且 $EF\perp AB$，$\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore EF=EC=3,\therefore EF=AD=3.$

在 $Rt\triangle BEF$ 中，由勾股定理，得

$BF=\sqrt{BE^2-EF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4.$

第 18 章　矩形、菱形与正方形

18.1　矩形

1. 矩形的性质

知识梳理

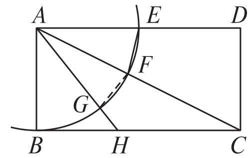
1. 直角　**2.** 对角线的交点　2　**3.** 直角

4. 相等

重难突破

1. C　[$\because$ 以点 A 为圆心，AB 长为半径画弧交 AD 于点 E，交 AC 于点 F，

又以点 F 为圆心，EF 长为半径画弧，与 BE 交于点 G，



$\therefore FG=FE,AB=AF=AE=AG.$

在 $\triangle AGF$ 和 $\triangle AEF$ 中，$\begin{cases}AG=AE,\\AF=AF,\\FG=FE,\end{cases}$

$\therefore \triangle AGF\cong\triangle AEF$(SSS)，

$\therefore \angle EAF=\angle GAF.$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

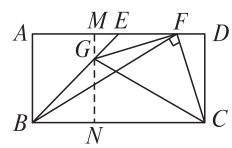
$\therefore AD\parallel BC,AD=BC=8$，

$\therefore \angle EAF=\angle ACB$，

$\therefore \angle GAF=\angle ACB$，即 $\angle HAC=\angle ACH$，

$\therefore HA=HC.\because HC=BC-BH=8-3=5,\therefore AH=5.$]

2. $2\sqrt{2}$　[如图，过点 G 作 $GN\perp BC$ 交 BC 于点 N，交 AD 于点 M.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABC=\angle A=\angle D=90^\circ,AD\parallel BC,AB=CD,\therefore MN\perp AD$，

$\therefore$ 四边形 $MNCD$ 是矩形，$\therefore MN=CD.$

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle GBN=\angle GBA=\angle AEB=45^\circ$，

$\therefore \triangle BNG,\triangle EMG$ 是等腰直角三角形，$\therefore ME=MG,NG=NB.$

$\because \triangle CFG$ 是等腰直角三角形，

$\therefore GF=CF,\angle GFC=90^\circ$，

$\therefore \angle MFG+\angle DFC=90^\circ,\angle DCF+\angle DFC=90^\circ$，

$\therefore \angle MFG=\angle DCF$.

在$\triangle GMF$和$\triangle FDC$中，

$\begin{cases}\angle MFG=\angle DCF,\\ \angle GMF=\angle D,\\ GF=FC,\end{cases}$

$\therefore \triangle GMF\cong\triangle FDC(\text{AAS})$，

$\therefore FM=CD=ME+EF=ME+2=MG+GN$，

$\therefore GN=2=BN$，

$\therefore$在$\text{Rt}\triangle BNG$中，$BG=\sqrt{BN^2+GN^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.]

基础巩固

1. C

2. C [$\because$矩形$ABCD$的对角线AC、BD相交于点O，$\therefore OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$，$AC=BD$，$\therefore OB=OC$，

$\therefore \angle OBC=\angle ACB=25^\circ$，$\therefore \angle AOB=\angle OBC+\angle ACB=25^\circ+25^\circ=50^\circ$.]

3. B

4. C [$\because$四边形$ABCD$是矩形，$CD=AB=4$，

$\therefore OA=OB=OD=OC$.

$\because CE$垂直平分OD，$\therefore CO=CD=4$，$OE=DE$，

$\therefore OB=DC=OD=4$，

$\therefore OE=DE=\frac{1}{2}OD=2$，

$\therefore BE=OB+OE=4+2=6$.]

5. B [$\because DE\parallel AC$，$CE\parallel BD$，$\therefore$四边形$ODEC$为平行四边形，$\therefore DE=OC$，$CE=OD$. $\because$四边形$ABCD$为矩形，

$\therefore AC=BD$，$OC=OA=\frac{1}{2}AC=2$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore OD=OC=2$，$\therefore DE=CE=2$，

$\therefore$四边形$OCED$的周长为8.]

6. D [如图，连结BF，交AE于点H，

$\because BC=6$，点E为BC的中点，$\therefore BE=3$，

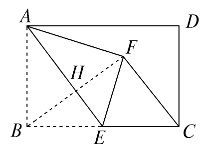
又$\because AB=4$，$\therefore AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=5$，

$\therefore BH=\frac{12}{5}$，则$BF=\frac{24}{5}$，

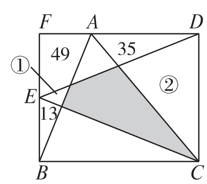
$\because FE=BE=EC$，

$\therefore \angle BFC=90^\circ$，

$\therefore CF=\sqrt{6^2-\left(\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{18}{5}$.]



7. A [由图，可知$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{矩形BCDF}$，



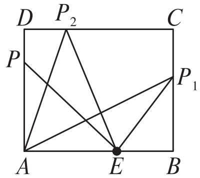
$\therefore 13+①+49+35+②=\frac{1}{2}S_{矩形BCDF}$.

$\because ①+$阴影部分面积$+②=\frac{1}{2}S_{矩形BCDF}$，

$\therefore$阴影部分面积$=13+49+35=97$.]

8. 8

9. $5\sqrt{2}$或$3\sqrt{10}$或5 [如图所示,点P的位置有三种情况.



①当$PE=AE=5$,即点P位于P_1的位置时.

$\because BE=AB-AE=9-5=4$,$\angle B=90°$,

$\therefore P_1B=\sqrt{P_1E^2-BE^2}=3$,

$\therefore$底边$AP_1=\sqrt{AB^2+P_1B^2}=3\sqrt{10}$;

②当$AP=AE=5$时,

$\because \angle BAD=90°$,

$\therefore \triangle AEP$是等腰直角三角形,

$\therefore$底边$PE=\sqrt{AP^2+AE^2}=5\sqrt{2}$;

③当$PA=PE$,即点P位于P_2的位置时,底边$AE=5$.

综上所述,等腰三角形AEP的底边长为$5\sqrt{2}$或$3\sqrt{10}$或5.]

10. (1)**证明:**$\because$四边形$ABCD$是矩形,

$\therefore \angle A=\angle D=90°$.

$\therefore \angle AEF+\angle AFE=90°$,

$\because EF\perp CE$,$\therefore \angle FEC=90°$,

$\therefore \angle AEF+\angle DEC=90°$,

$\therefore \angle AFE=\angle DEC$.

在$\triangle AEF$和$\triangle DCE$中,

$$\begin{cases}\angle AFE=\angle DEC,\\ \angle A=\angle D=90°,\\ EF=CE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DCE$(AAS).

(2)**解:**$\because \triangle AEF\cong\triangle DCE$,$\therefore AE=CD$.

$\because$矩形$ABCD$的周长为16,

$\therefore 2(AD+CD)=16$. $\because DE=2$,

$\therefore 2(AE+2+AE)=16$,$\therefore AE=3$.

素养提升

11. **解:**(1)$\because$四边形$ABCD$是矩形,

$\therefore AD=BC=15$,

由题意,可知$BP=3t$,

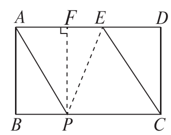
$\therefore PC=BC-BP=15-3t$,

$\because DE=6$,$\therefore AE=AD-DE=9$,

$\therefore AE=PC$时,四边形$APCE$是平行四边形,$\therefore 9=15-3t$,解得$t=2$,

$\therefore$当t为2 s时,四边形$APCE$是平行四边形.

(2)如图,连结PE,过点P作$PF\perp AD$于F,



$\therefore AF=BP=3t$,$EF=9-3t$,$PC=15-3t$,

$\because P$在EC的垂直平分线上时,$PE=PC$,

在$Rt\triangle EFP$中,$EF^2+PF^2=PE^2$,

$\therefore 9^2+(9-3t)^2=(15-3t)^2$,

解得$t=\frac{7}{4}$.

$\therefore$当t为$\frac{7}{4}$ s时,点P在EC的垂直平分线上.

2. 矩形的判定

知识梳理

1. 直角 **2.** 直角 **3.** 相等 **4.** 一半

5. 一半

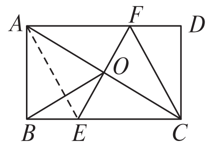
重难突破

A

基础巩固

1. D **2.** B **3.** D

4. D [∵在矩形 $ABCD$ 中，O 为 AC 的中点，∴$OA=OB=OC$. 又∵$AB=BO$，∴$AB=OB=OA$，∴$\triangle AOB$ 是等边三角形，∴$\angle BAO=60°$，故 A 选项正确，不符合题意；如图所示，连结 AE，在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle AOE$ 中，



$\begin{cases}AB=AO,\\AE=AE,\\BE=OE,\end{cases}$ ∴$\triangle ABE\cong\triangle AOE$(SSS)，∴$\angle ABE=\angle AOE$，$\angle BAE=\angle OAE=\frac{1}{2}\angle BAO=30°$. ∵在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABE=90°$，∴$\angle AOE=90°$，∴$AC\perp EF$，故 B 选项正确，不符合题意；在 Rt$\triangle ABE$ 中，∵$\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAO=30°$，$\angle ABE=90°$，∴$AE=2BE$，∴$AB=\sqrt{AE^2-BE^2}=\sqrt{3}BE$，故 D 选项错误，符合题意；∵$OC=AB$，$AB=CD$，∴$OC=DC$. 又∵$CF=CF$，∴Rt$\triangle OCF\cong$Rt$\triangle DCF$(HL)，∴$OF=DF$，故 C 选项正确，不符合题意.]

5. D

6. $\angle A=90°$ **7.** 4

8. 证明：(1)∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB/\!/CD$，∴$\angle BAE=\angle FDE$.

∵点 E 是 AD 的中点，∴$AE=DE$，

在$\triangle BEA$ 和$\triangle FED$ 中，

$\begin{cases}\angle BAE=FDE,\\AE=DE,\\\angle BEA=\angle FED,\end{cases}$

∴$\triangle BEA\cong\triangle FED$(ASA)，∴$AB=DF$，

又∵$AB/\!/DF$，∴四边形 $ABDF$ 是平行四边形.

(2)∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$\angle BAE=\angle C$.

∵$\angle BEA+\angle BAE+\angle ABE=180°$，

$\angle BEA+2\angle C=180°$，

∴$\angle BAE=\angle ABE$，∴$BE=AE$.

由(1)知，四边形 $ABDF$ 是平行四边形，∴$BE=\frac{1}{2}BF$.

∵$AE=\frac{1}{2}AD$，∴$BF=AD$，

∴平行四边形 $ABDF$ 是矩形.

素养提升

9. (1)**证明：**∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴$AD=BC$，$AD/\!/BC$，$\angle ADM=\angle CBN$.

∵$AM\perp BD$，$CN\perp BD$，

∴$\angle AMD=\angle CNB=90°$，

在$\triangle AMD$ 和$\triangle CNB$ 中，

$\begin{cases}\angle ADM=\angle CBN,\\\angle AMD=\angle CNB,\\AD=BC,\end{cases}$

∴$\triangle AMD\cong\triangle CNB$，∴$AM=CN$.

(2)**解**:猜想:当 $EF=AC$ 时,四边形 $AECF$ 是矩形.

证明:由(1)得$\triangle AMD\cong\triangle CNB$,

$\therefore DM=BN$.

$\because BE=DF$,$\therefore DM+DF=BN+BE$,

即 $MF=NE$.

在$\triangle AMF$ 和$\triangle CNE$ 中,

$$\begin{cases}MF=NE,\\ \angle AMF=\angle CNE,\\ AM=CN,\end{cases}$$

$\therefore\triangle AMF\cong\triangle CNE$,

$\therefore AF=CE$,$\angle AFE=\angle CEF$,

$\therefore AF\parallel CE$,

$\therefore$四边形 $AECF$ 是平行四边形.

又$\because EF=AC$,$\therefore$四边形 $AECF$ 是矩形.

18.2 菱形

1. 菱形的性质

知识梳理

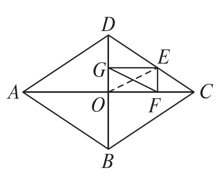
1. 邻边 **2.** 都相等

3. 互相垂直 一组对角

重难突破

1. B

2. A [如图,连结 OE. $\because$四边形 $ABCD$ 是菱形,



$\therefore AC\perp BD$,$OD=\frac{1}{2}BD=3$,$OC=\frac{1}{2}AC=4$,

$\because$由勾股定理,得 $CD=\sqrt{OD^2+OC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

又$\because EF\perp OC$,$EG\perp OD$,

$\therefore$四边形 $OFEG$ 为矩形,

$\therefore GF=OE$,

$\because$当 $OE\perp CD$ 时,OE 值最小,

$\therefore$此时 GF 值最小.

$S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}OC\cdot OD=\frac{1}{2}CD\cdot OE$,

$\therefore OE=\frac{OC\cdot OD}{CD}=\frac{4\times3}{5}=2.4$,

$\therefore FG$ 的最小值为 2.4.]

基础巩固

1. A **2.** B **3.** C **4.** C

5. C [$\because\frac{DE}{AE}=\frac{3}{4}$,设 $DE=3k$,

则 $AE=4k$.

$\because DE\perp AE$,$\therefore AD=5k$,

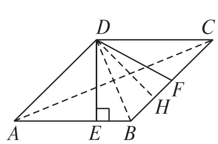
$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AD=AB=CD=5k$,$\therefore BE=k=1$,

$\therefore AB=CD=5$,$DE=3$. 故①正确;

$\therefore S_{梯形DEBC}=\frac{1}{2}\times(1+5)\times3=9$,故②正确;

如图,连结 BD、AC,



则$\angle ABD=\angle CBD$.

$\because DE=3$,$EB=1$,$DE\perp AB$,

$\therefore DB=\sqrt{10}$.

又$\because S_{\square ABCD}=AB\times DE=5\times3=15$,

$S_{\square ABCD}=\frac{1}{2}\times BD\times AC$,

$\therefore 15=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times AC$,

$\therefore AC=3\sqrt{10}$,

$\therefore(AC+BD)(AC-BD)=AC^2-BD^2=(3\sqrt{10})^2-(\sqrt{10})^2=90-10=80$. 故③正确;

如图,作 $DH\perp BC$ 于点 H.

$\because DE\perp AB, DH\perp BC, \angle ABD=\angle CBD$,

$\therefore DE=DH$. 又$\because DH<DF$, $\therefore DE<DF$. 故④错误. 所以①②③正确.]

6. 110°

7. 3 [$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore BC=DC, AC\perp BD$,

$\therefore\angle BEC=90^\circ$.

$\because\angle DBC=60^\circ$, $\therefore\triangle BDC$ 是等边三角形, $\therefore BC=BD=6$.

$\because$点 F 为 BC 中点, $\therefore EF=\frac{1}{2}BC=3$.]

8. $\frac{50}{13}$ [$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC=24, BD=10$,

$\therefore AO=12, OD=5, AC\perp BD$,

$\therefore AD=AB=\sqrt{12^2+5^2}=13$,

$\because DH\perp AB$, $\therefore AO\cdot BD=DH\cdot AB$,

$\therefore 12\times10=13DH$, $\therefore DH=\frac{120}{13}$,

$\therefore BH=\sqrt{10^2-\left(\frac{120}{13}\right)^2}=\frac{50}{13}$.]

9. (1)**证明:**$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB\parallel CD, AC\perp BD$,

$\therefore AE\parallel CD, \angle AOB=90^\circ$,

$\because DE\perp BD$, 即$\angle EDB=90^\circ$,

$\therefore\angle AOB=\angle EDB$,

$\therefore DE\parallel AC$,

$\therefore$四边形 $ACDE$ 是平行四边形.

(2)**解:**$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC=8, BD=6$,

$\therefore AO=4, DO=3$, 由勾股定理可得 $AD=CD=5$,

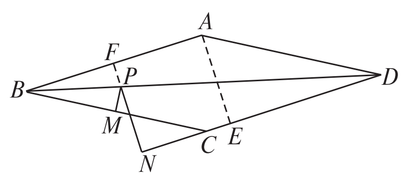
$\because$四边形 $ACDE$ 是平行四边形,

$\therefore AE=CD=5, DE=AC=8$,

$\therefore\triangle ADE$ 的周长为 $AD+AE+DE=5+5+8=18$.

素养提升

10. 解:(1)如图,过点 A 作 $AE\perp CD$,



$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB\parallel DC, CD=AD=AB=4$,

$\therefore\angle ADE=180^\circ-\angle BAD=180^\circ-150^\circ=30^\circ$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中, $AE=\frac{1}{2}AD=2$,

$\therefore S_{菱形ABCD}=CD\times AE=4\times2=8$,

即菱形 $ABCD$ 的面积为 8.

(2)如图,延长 NP,交 AB 于点 F.

$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AB\parallel DC$.

$\because PN \perp CD$，即 $\angle BFN = \angle FND = 90^\circ$，

$\therefore PN \perp AB$.

$\because P$ 为对角线 BD 上一点，$PM \perp BC$，

$\therefore PF = PM$，则 $PM + PN = PF + PN = FN$.

$\because AE \perp CD, PN \perp CD, \therefore FN \parallel AE$.

$\because AB \parallel DC$，$\therefore$ 四边形 $AENF$ 是平行四边形，

$\therefore PM + PN = FN = AE = 2$.

2. 菱形的判定

知识梳理

1. 邻边　**2.** 四边形　**3.** 平行四边形

重难突破

1. B　**2.** 菱形

3. (1)①或③

(2)**证明：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$.

$\because AE \parallel CF$，$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

补充条件①$AE = CE$：$\because$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，$AE = CE$，

$\therefore$ 平行四边形 $AECF$ 是菱形；

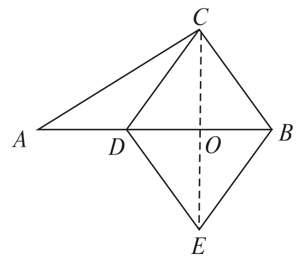
补充条件③$AC \perp EF$：$\because$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，$AC \perp EF$，

$\therefore$ 平行四边形 $AECF$ 是菱形.

基础巩固

1. D　**2.** D　**3.** D

4. $\frac{7}{5}$　[如图，连结 CE 交 AB 于点 O.



$\because$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90^\circ$，$AC = 4$，$BC = 3$，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^3} = 5$.

若平行四边形 $CDEB$ 为菱形，

则 $CE \perp BD$，$OD = OB$，$CD = CB$.

$\because S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = \frac{1}{2}AC \cdot BC$，

$\therefore OC = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{12}{5}$.

在 Rt$\triangle BOC$ 中，根据勾股定理，得 $OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{9}{5}$，

$\therefore AD = AB - DB = AB - 2OB = \frac{7}{5}$.]

5. 证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore BC = CD$，$\angle DCA = \angle BCA$，

$\therefore \angle DCF = \angle BCF$，

$\because CF = CF$，$\therefore \triangle CDF \cong \triangle CBF$，

$\therefore DF = BF$，$\because AD \parallel BC$，

$\therefore \angle DAC = \angle BCA$，

$\therefore \angle DAE = \angle BCF$，

$\because AE = CF$，$DA = BC$，

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle BCF$，$\therefore DE = BF$，同理可证 $\triangle DCF \cong \triangle BAE$，$\therefore DF = BE$，

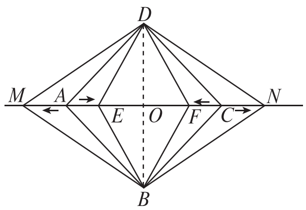
$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形，

$\because DF=BF$，

$\therefore$平行四边形 $BEDF$ 是菱形.

素养提升

6. 证明:(1)如图,连结 BD,与 AC 相交于 O 点,



$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC\perp BD$, $OA=OC$, $OB=OD$,

$\because E$、F 同时出发,速度相同,

$\therefore AE=CF$, $\therefore OE=OF$,

$\because OB=OD$,

$\therefore$四边形 $EBFD$ 是平行四边形,

又$\because AC\perp BD$,

$\therefore$四边形 $EBFD$ 是菱形.

(2)$\because M$、N 同时从 A、C 出发,速度相同,$\therefore AM=CN$,由(1)得 $OB=OD$, $OA=OC$, $\therefore OM=ON$, $\because OD=OB$,

$\therefore$四边形 $MBND$ 是平行四边形,

又$\because MN\perp BD$,

$\therefore$四边形 $MBND$ 是菱形.

18.3　正方形

知识梳理

1. 直角　邻边　**2.** 所有的性质　都相等　都是直角　相等且互相垂直平分　45

3. 菱形　**4.** 矩形

重难突破

1. 证明:$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle CBF+\angle FBA=90^\circ$, $AB=BC$.

$\because CF\perp BE$, $\therefore \angle CBF+\angle BCF=90^\circ$,

$\therefore \angle BCF=\angle ABE$. $\because AE\perp BE$,

$\therefore \angle AEB=\angle BFC=90^\circ$, $\therefore \triangle ABE\cong\triangle BCF$(AAS), $\therefore AE=BF$, $BE=CF$,

$\therefore AE-CF=BF-BE=EF$,即 $EF=AE-CF$.

2. 证明:$\because BF\parallel CE$, $CF\parallel BE$,

$\therefore$四边形 $BECF$ 是平行四边形.

$\because$在矩形 $ABCD$ 中, $AD=2CD$, E 是 AD 的中点,

$\therefore AE=AB=DE=DC$.

在$\triangle ABE$ 和$\triangle DCE$ 中, $\begin{cases}AB=DC,\\ \angle A=\angle D,\\ AE=DE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle DCE$(SAS), $\therefore BE=CE$, $\angle AEB=\angle DEC=45^\circ$,

$\therefore \angle BEC=180^\circ-\angle AEB-\angle DEC=90^\circ$,

$\therefore$平行四边形 $BECF$ 是正方形.

基础巩固

1. B　**2.** B　**3.** D　**4.** D　**5.** B

6. $AC=BC$(答案不唯一)

7. $\sqrt{13}$　[$\because$四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore \angle ADE=\angle C=90^\circ$, $AD=DC=BC$,

$\because BF=CE$, $\therefore CF=DE$,

在$\triangle ADE$ 和$\triangle DCF$ 中,

$\begin{cases}AD=CD,\\ \angle ADE=\angle C,\\ DE=CF,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle DCF$.

$\therefore \angle DAE = \angle CDF$,

$\because \angle DAE + \angle DEA = 90^\circ$,

$\therefore \angle CDF + \angle DEA = 90^\circ$,

$\therefore \angle AGF = \angle DGE = 90^\circ$

$\because$点 H 为 AF 的中点,$\therefore GH = \frac{1}{2}AF$,

$\because AB = 6, BF = 4$,

$\therefore AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$,

$\therefore GH = \sqrt{13}$.]

8. **证明:**(1)在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDE$ 中,$\begin{cases} AD = CD, \\ DE = DE, \\ EA = EC, \end{cases}$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDE$,

$\therefore \angle ADE = \angle CDE$,

$\because AD /\!/ BC$, $\therefore \angle ADE = \angle CBD$,

$\therefore \angle CDE = \angle CBD$,

$\therefore BC = CD$,

$\because AD = CD$, $\therefore BC = AD$,

$\because AD /\!/ BC$,

$\therefore$四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\because AD = CD$,

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2)$\because BE = BC$, $\therefore \angle BCE = \angle BEC$,

$\because \angle CBE : \angle BCE = 2 : 3$,

$\therefore \angle CBE = 180^\circ \times \frac{2}{2+3+3} = 45^\circ$,

$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore \angle ABE = 45^\circ$,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是正方形.

素养提升

9. (1)**证明:**$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle A = \angle ADC = 90^\circ$,

$\because$将矩形纸片 $ABCD$ 沿过点 D 的直线折叠,使点 A 落在 CD 上的点 A' 处,得到折痕 DE,

$\therefore AD = A'D$, $AE = A'E$, $\angle ADE = \angle A'DE = 45^\circ$,

$\because AB /\!/ CD$,

$\therefore \angle AED = \angle A'DE = \angle ADE$,

$\therefore AD = AE$,

$\therefore AD = AE = A'E = A'D$,

$\therefore$四边形 $AEA'D$ 是菱形,

$\because \angle A = 90^\circ$,

$\therefore$四边形 $AEA'D$ 是正方形.

(2)$MC' = ME$.

证明:如图 1,连结 $C'E$,由(1),知 $AD = AE$,

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD = BC$, $\angle EAC' = \angle B = 90^\circ$,

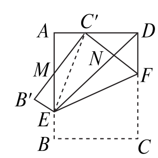


图 1

由折叠,知 $B'C' = BC$, $\angle B = \angle B'$,

$\therefore AE = B'C'$, $\angle EAC' = \angle B'$,

又$\because EC' = C'E$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle EC'A$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle C'EB'$ 中,

$\begin{cases} EC'=C'E, \\ AE=B'C', \end{cases}$

$\therefore Rt\triangle EC'A \cong Rt\triangle C'EB'$(HL),

$\therefore \angle C'EA=\angle EC'B'$,

$\therefore MC'=ME$.

章末复习课

1. D

2. $\sqrt{5}$ [$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD /\!/ BC, \angle A=90^\circ$,

$\therefore \angle AEB=\angle FBC$. $\because CF \perp BE$,

$\therefore \angle CFB=90^\circ$, $\therefore \angle CFB=\angle A$.

在$\triangle ABE$和$\triangle FCB$中,

$\begin{cases} \angle A=\angle CFB, \\ \angle AEB=\angle FBC, \\ BE=CB, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FCB$(AAS), $\therefore FC=AB=2$.

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore BC=AD=3$,

$\therefore$在 $Rt\triangle FCB$ 中,由勾股定理,得 $BF=\sqrt{BC^2-FC^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.]

3. (1)**证明:**$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore DF /\!/ BE$.

$\because DF=BE$,

$\therefore$四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

$\because DE \perp AB$, $\therefore \angle DEB=90^\circ$,

$\therefore$四边形 $BFDE$ 是矩形.

(2)**解:**$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore CD /\!/ AB$,

$\therefore \angle BAF=\angle AFD$.

$\because AF$ 平分$\angle DAB$, $\therefore \angle BAF=\angle DAF$,

$\therefore \angle DAF=\angle AFD$, $\therefore AD=DF=5$.

$\because \angle AED=90^\circ$,

$\therefore DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

4. C

5. 8

6. A [$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AO=OC, OB=OD$. $\because \angle OBC=\angle OCB$, $\therefore OB=OC$, $\therefore AO=OB=OC=OD$, $\therefore AC=BD$, $\therefore$平行四边形 $ABCD$ 是矩形. $\because AB=BC$, $\therefore$矩形 $ABCD$ 为正方形,故①符合题意;$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形, $AC \perp BD$, $\therefore$矩形 $ABCD$ 为正方形,故②符合题意;当 $AC=BD$ 或$\angle ABC=90^\circ$,四边形 $ABCD$ 仍是矩形,故③④不符合题意.]

7. $\sqrt{10}$ [$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB=BC=CD=DA, \angle A=\angle B=\angle DCB=\angle ADC=90^\circ$,

$\therefore \angle DCF=90^\circ, \angle ADE+\angle EDC=90^\circ$.

$\because DF \perp DE$, $\therefore \angle EDC+\angle CDF=90^\circ$,

$\therefore \angle ADE=\angle CDF$.

又$\because AD=CD, \angle A=\angle DCF=90^\circ$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF$(ASA),

$\therefore AE=CF=1$,

$\because E$ 是 AB 的中点, $\therefore BE=AE=1$,

$\therefore AB=BC=2$, $\therefore BF=3$.

在 $Rt\triangle BEF$ 中, $EF=\sqrt{BE^2+BF^2}=\sqrt{10}$.]

8. **证明：**(1)$\because AD=CD$，点 E 是边 AC 的中点，

$\therefore DE\perp AC$，

$\therefore DE$ 是线段 AC 的垂直平分线，

$\therefore AF=CF$，$\therefore \angle FAC=\angle ACB$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，由 $\angle BAC=90^\circ$，

得 $\angle B+\angle ACB=90^\circ$，$\angle FAC+\angle BAF=90^\circ$，

$\therefore \angle B=\angle BAF$，

$\therefore AF=BF$.

(2)$\because AG/\!/CF$，$\therefore \angle AGE=\angle CFE$.

又$\because$点 E 是边 AC 的中点，

$\therefore AE=CE$.

在$\triangle AEG$ 和$\triangle CEF$ 中，

$\begin{cases}\angle AGE=\angle CFE,\\ \angle AEG=\angle CEF,\\ AE=CE,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEG\cong\triangle CEF(\mathrm{AAS})$，

$\therefore AG=CF$.

又$\because AG/\!/CF$，$\therefore$四边形 $AFCG$ 是平行四边形.

$\because AF=CF$，$\therefore$四边形 $AFCG$ 是菱形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，由 $AF=CF$，$AF=BF$，得 $BF=CF$.

即得点 F 是边 BC 的中点.

又$\because AB=AC$，$\therefore AF\perp BC$，

$\therefore \angle AFC=90^\circ$.

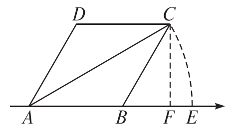
$\therefore$四边形 $AFCG$ 是正方形.

章末评价检测(第 18 章)

1. D　**2.** C　**3.** D　**4.** C　**5.** D　**6.** A

7. B

8. D　[如图，过点 C 作 AE 的垂线，垂足为点 F. $\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AB=BC=2$，AC 平分$\angle DAB$，$AD/\!/BC$，$\therefore \angle DAB+\angle ABC=180^\circ$，$\therefore \angle DAB=180^\circ-\angle ABC=60^\circ$，$\therefore \angle CAB=\frac{1}{2}\angle DAB=30^\circ$，$\therefore AC=2CF$. $\because \angle ABC=120^\circ$，$\therefore \angle CBF=60^\circ$，$\therefore \angle BCF=30^\circ$，$\therefore BF=\frac{1}{2}BC=1$，$\therefore CF=\sqrt{BC^2-BF^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，$\therefore AC=2CF=2\sqrt{3}$，$\therefore AE=AC=2\sqrt{3}$. $\because$点 E 表示的数是 3，$\therefore$点 A 表示的数是$(3-2\sqrt{3})$.]

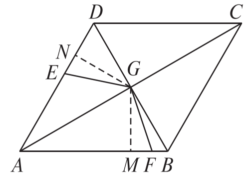


9. 3　**10.** =　**11.** 120°

12. (1)8　(2)$12\sqrt{3}$　[(1)$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AB=AD$.

$\because \angle DAB=60^\circ$，$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形，$\therefore BD=AB=8$；]

(2)$12\sqrt{3}$　[如图，过点 G 作 $GM\perp AB$ 于点 M，$GN\perp AD$ 于点 N，



则$\angle GMA=\angle GMB=\angle GND=\angle GNA=90^\circ$，$\therefore \angle MGN+\angle DAB=360^\circ-90^\circ-90^\circ=180^\circ$，

$\therefore \angle MGN=180^\circ-\angle DAB=120^\circ$.

$\because \angle EGF=120°$,

$\therefore \angle EGF-\angle EGM=\angle MGN-\angle EGM$,即$\angle MGF=\angle NGE$.

$\because$四边形$ABCD$是菱形,$\therefore BG=DG=\frac{1}{2}BD=4$,$\angle BAG=\angle DAG$,

$\therefore GM=GN$,$\therefore \triangle MGF\cong\triangle NGE$(ASA),$\therefore S_{\triangle MGF}=S_{\triangle NGE}$,

$\therefore S_{四边形AEGF}=S_{四边形ANGM}$. $\because AG=AG$,$GM=GN$,$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AGM\cong\mathrm{Rt}\triangle AGN$(HL),$\therefore S_{\triangle AGM}=S_{\triangle AGN}$. 由(1),可知$\triangle ABD$是等边三角形,$\therefore \angle ABG=60°$,$\therefore \angle BGM=90°-\angle ABG=30°$,

$\therefore BM=\frac{1}{2}BG=2$,$\therefore AM=AB-BM=8-2=6$,$GM=\sqrt{BG^2-BM^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$,$\therefore S_{四边形AEGF}=S_{四边形ANGM}=2S_{\triangle AGM}=2\times\frac{1}{2}AM\cdot GM=6\times2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.]

13. (1)**证明:**$\because$四边形$ABCD$是菱形,

$\therefore AD=BC$,$AD\parallel BC$,

$\therefore \angle ADF=\angle CBE$.

在$\triangle ADF$和$\triangle CBE$中,

$$\begin{cases}AD=CB,\\ \angle ADF=\angle CBE,\\ DF=BE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF\cong\triangle CBE$(SAS).

(2)**解:**$\because$四边形$ABCD$是菱形,$\angle BAD=120°$,

$\therefore \angle ABC=60°$.

$\therefore \angle ABE=\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$,$AB=CB$.

$\because BE=BE$,$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CBE$(SAS),$\therefore AE=CE$.

$\because \triangle AEF$为等边三角形,$\therefore \angle AEF=60°$,$AE=EF=AF$,

$\therefore \angle BAE=60°-\angle ABE=30°$,

$\therefore \angle BAE=\angle ABE$,$\therefore BE=AE$,

同理$AF=DF$,$\therefore BE=EF=DF$.

$\because BD=6$,$\therefore CE=BE=\frac{1}{3}BD=2$.

14. **证明:**(1)$\because AB$所在直线是CD的垂直平分线,

$\therefore AC=AD$,

又$\because AB\perp CD$,$\therefore \angle CAB=\angle DAB$(等腰三角形的三线合一).

(2)$\because ME\perp AC$,$MF\perp AD$,$\angle CAD=90°$,

即$\angle CAD=\angle AEM=\angle AFM=90°$,

$\therefore$四边形$AEMF$是矩形,

又$\because \angle CAB=\angle DAB$,$ME\perp AC$,$MF\perp AD$,

$\therefore ME=MF$,

$\therefore$矩形$AEMF$是正方形.

15. **证明:**(1)$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,$\therefore AD=BC$,$AD\parallel BC$.

又$\because BE=DF$,$\therefore EC=AF$.

又$\because AF\parallel EC$,

$\therefore$四边形$AECF$是平行四边形.

(2)$\because AF\parallel CE$,

$\therefore \angle FAC=\angle ACE$. $\because AC$平分$\angle EAF$,

$\therefore \angle EAC=\angle FAC$，

$\therefore \angle EAC=\angle ACE$，$\therefore AE=CE$，

$\therefore$四边形 $AECF$ 是菱形，

$\therefore AF=AE=EC=5$. $\because BC=8$，

$\therefore BE=BC-CE=3$.

$\because AB=4, AE=5, BE=3$，

$\therefore AB^2+BE^2=AE^2$，$\therefore \angle B=90°$.

$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是矩形.

16. 证明：(1)在▱$ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，

$\therefore \angle 2=\angle ACB$，

又$\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle 1=\angle ACB$，

$\therefore AB=BC$，

$\therefore$▱$ABCD$ 是菱形.

(2)在▱$ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，

$\therefore \angle AFE=\angle EBC$，

又$\because AF=AE$，

$\therefore \angle AFE=\angle AEF=\angle BEC$，

$\therefore \angle EBC=\angle BEC$，$\therefore BC=CE$，

$\therefore AC=AE+CE=AF+BC=2OA$，

$\therefore OA=\frac{1}{2}(AF+BC)$，又$\because AB=BC$，

$\therefore OA=\frac{1}{2}(AF+AB)$.

第 19 章　数据的分析

19.1　数据的集中趋势

1. 平均数的意义

知识梳理

1. 平均数　$\overline{x}$　**2.** 集中趋势

重难突破

解：(1)平均值是$\frac{853+872+865+868+857}{5}=863$(米).

(2)$\because 853-863=-10$，$872-863=9$，$865-863=2$，$868-863=5$，$857-863=-6$.

$\therefore$用正、负数表示出每次测量的数值与平均值的差分别是-10 米，9 米，2 米，5 米，-6 米.

基础巩固

1. C　**2.** B　**3.** B　**4.** B　**5.** B

6. 90　**7.** 90.5

8. 解：(1)$-3+4+5+(-1)=5$，

$\therefore$这已知的四个数的和为 5.

(2)①由题意，得 $a+4+(-1)=-3+4+5$，解得 $a=3$.

②由①，知 $a=3$，

$\therefore a, 5, -1, -3$ 这四个数的平均数是 $[3+5+(-1)+(-3)]\div 4=4\div 4=1$.

素养提升

9. 解：$\because$小林五次成绩(143，145，144，146，a)的平均数为 144，$\therefore$这五次成绩的总数为 $144\times 5=720$，

$\because$小林自己又记录了两次练习成绩为 141，147，

$\therefore$他七次练习成绩的平均数为$(720+141+147)\div 7=1\ 008\div 7=144$.

2. 加权平均数

知识梳理

1. $\overline{x}=\frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$

重难突破

解:设 k_1,k_4,k_8 顺次为 3 个班的考评分,则:

$k_1=\frac{1}{10}\left(3\times10+2\times10+3\times6+1\times10+1\times7\right)=8.5$.

$k_4=\frac{1}{10}\left(3\times10+2\times8+3\times8+1\times9+1\times8\right)=8.7$.

$k_8=\frac{1}{10}\left(3\times9+2\times10+3\times9+1\times6+1\times9\right)=8.9$.

因为 $k_8>k_4>k_1$,所以推荐八(8)班为市级先进班集体的候选班级.

基础巩固

1. B **2.** B **3.** C **4.** B **5.** C

6. 1∶4 [设男同学人数为 x 人,女同学人数为 y 人,由题意得 $18x+13y=14(x+y)$,解得 $4x=y$,即 $x:y=1:4$.]

7. **解:**(1)九年级捐书本数为 $1\,000\times30\%\times4=1\,200$(本),

八年级捐书本数为 $1\,000\times35\%\times6=2\,100$(本),

七年级捐书本数为 $1\,000\times(1-30\%-35\%)\times2=700$(本),

∴捐书总本数为 $1\,200+2\,100+700=4\,000$(本).

因此,该校学生捐图书的总本数为 4 000 本.

(2)$4\,000\div1\,000=4$(本),

因此,该校学生平均每人捐图书 4 本.

素养提升

8. **解:**(1)甲班的平均分为 $(85+91+88)\div3=88$(分),

乙班的平均分为 $(90+84+87)\div3=87$(分).

∵$88>87$,∴甲班将获胜;

(2)由题意,可得甲班的平均分为 $\frac{85\times5+91\times3+88\times2}{5+3+2}=87.4$(分),乙班的平均分为 $\frac{90\times5+84\times3+87\times2}{5+3+2}=87.6$(分).

∵$87.4<87.6$,

∴乙班将获胜.

3. 中位数和众数

4. 平均数、中位数和众数的选用

知识梳理

1. 由小到大 由大到小 中间位置 平均数 中间 平均数

2. 次数最多

重难突破

1. C **2.** C **3.** C

基础巩固

1. B **2.** B **3.** C **4.** C **5.** A **6.** C

7. C [这组数据的中位数是 10,众数是 8,平均数是 $\frac{7+8+8+9+10+12+14+17+19}{9}\approx11.56$,最大数据是 19,因此将每名学

生标准做题量定为 10 道,其依据是统计数据中的中位数.]

8. 1.0 **9.** 5

10. 5,5 [在这一组数据中 5 出现的次数最多,故众数是 5.将这组数据按从小到大的顺序排列后,处于中间位置的两个数是 5,5,那么由中位数的定义可知,这组数据的中位数是 5.]

11. 解:(1)将 A 型号重新排列得:25,28,30,30,30,31,32,33,35,36;

$\therefore a=\frac{30+31}{2}=30.5$;

B 型号重新排列得:25,28,28,29,31,32,32,32,37,38.

32 出现了 3 次,出现次数最多,

$\therefore b=32$.

故答案为:30.5;32.

(2)虽然平均数相同,但从众数、中位数看 B 型号都优于 A 型号,

∴B 型号的无人飞行器的续航性能更优;

(3)估算该公司存在严重飞行安全问题的无人飞行器数量为:

$10\ 000\times\frac{5}{200}=250$,

答:估计该公司存在严重飞行安全问题的无人飞行器数量大约有 250 架.

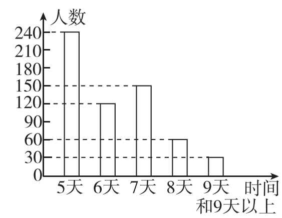
素养提升

12. 解:(1)$a=1-(40\%+20\%+25\%+5\%)=1-90\%=10\%$,所对应的圆心角度数$=360°\times10\%=36°$.

被抽查的学生人数为 $240\div40\%=600$,

8 天的人数为 $600\times10\%=60$,

补全统计图如图所示.



(2)参加社会实践活动 5 天的人数最多,所以众数是 5 天,600 人中,按照参加社会实践活动的天数从少到多排列,第 300 人和 301 人都是 6 天,所以,中位数是 6 天.

(3)$2\ 000\times(25\%+10\%+5\%)=2\ 000\times40\%=800$(人).

19.2 数据的离散程度

重难突破

1. 2 **2.** A

基础巩固

1. A **2.** B

3. B [∵数据 a,b,c 的平均数为 5,

$\therefore\frac{1}{3}(a+b+c)=5$,

$\therefore\frac{1}{3}(a-2+b-2+c-2)=\frac{1}{3}(a+b+c)-2=5-2=3$,

∴数据 $a-2,b-2,c-2$ 的平均数是 3;

∵数据 a,b,c 的方差为 4，∴$\frac{1}{3}[(a-5)^2+(b-5)^2+(c-5)^2]=4$，∴数据 $a-2,b-2,c-2$ 的方差为 $\frac{1}{3}[(a-2-3)^2+(b-2-3)^2+(c-2-3)^2]=\frac{1}{3}[(a-5)^2+(b-5)^2+(c-5)^2]=4$.］

4. D

5. C ［由表，可知年龄为 15 岁与年龄为 16 岁的频数和为 $x+11-x=11$，14 岁人数有 12 人，故该组数据的众数为 12，中位数为 $(14+14)\div2=14$. 即对于不同的 x，关于年龄的统计量不会发生改变的是众数和中位数.］

6. C ［甲、乙两地气温的平均数都为 6 ℃；甲地气温的中位数为 6 ℃；乙地气温的众数为 4 ℃和 8 ℃；乙地气温的波动小，相对比较稳定.］

7. 2.5 **8.** 甲

素养提升

9. 解：(1)84 90 0.5 ［甲的成绩由小到大排列为 76，81，81，84，84，84，85，87，88，90，所以甲的中位数为 $\frac{1}{2}(84+84)=84$；由表格，知乙的众数为 90；乙的 85 分及以上的次数为 5；

∴乙的 85 分及以上的频率 $=\frac{5}{10}=0.5$.］

(2)两个同学的成绩的平均数和中位数相同，乙的众数比甲的高，85 分及以上的次数乙比甲多；但甲的方差比乙小，成绩更稳定.

19.3 借助箱线图描述数据的分布

知识梳理

1. 中位数 下四分位数 上四分位数

2. 箱线图

重难突破

D

基础巩固

1. B **2.** D

3. 2.5 **4.** ①②③④ **5.** ①③④ **6.** 4.5

7. 解：将这 23 个数据从小到大排列如下：

44 45 47 48 49 49 50 50

51 51 52 52 53 54 54 54

55 57 58 58 59 61 62

∴该样本数据的第 6，12，18 项数据分别为 49，52，57，

∴该样本数据的四分位数分别为 49，52，57.

8. 解：由两班成绩箱线图可以看出，

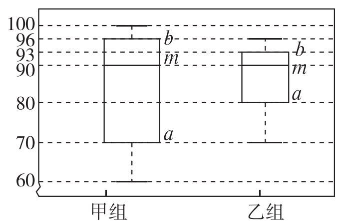
甲班成绩的中位数为 128，而乙班的上四分位数是 128，同时，甲班的下四分位数明显高于乙班，由此估计甲班平均分较高.

素养提升

9. 解：(1)把甲组的测试成绩从小到大排

列为 60,70,70,80,89,91,92,96,98,100,故 $m=\frac{89+91}{2}=90$,$a=70$,$b=96$;

(2)绘制甲组的箱线图如图所示:



(3)根据箱线图和四分位数,可知甲组成绩比较分散,乙组成绩比较集中.(答案不唯一)

章末复习课

1. 16

2. 83 **3.** C **4.** 23

5. 解:(1)8 8 9 [由题意,知甲的众数为 8,乙的平均数 $=\frac{1}{5}\times(5+9+7+10+9)=8$,乙的中位数为 9.]

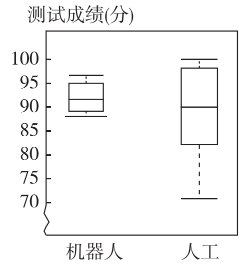
(2)因为他们的平均数相等,而甲的方差小,发挥比较稳定,所以选择甲参加射击比赛;(合理即可)

(3)变小 [因为乙的成绩的平均数是 8,如果乙再射击 1 次,命中 8 环,那么乙的射击成绩的平均数还是 8,所以乙射击成绩的方差是 $\frac{1}{6}[(5-8)^2+(9-8)^2+(7-8)^2+(10-8)^2+(9-8)^2+(8-8)^2]=\frac{8}{3}<3.2$.]

6. 15.3

7. 解:(1)89 95

(2)补全机器人的箱线图,如图所示;



通过箱线图可知,机器人的样本数据的中位数高于人工,且较稳定,所以可以推断机器人操作在技能方面更有优势.

章末评价检测(第 19 章)

1. B **2.** D **3.** C **4.** D **5.** B **6.** C **7.** B

8. C [由题图,可知,甲的成绩为 7,7,8,9,8,9,10,9,9,9,乙的成绩为 8,9,7,8,10,7,9,10,7,10,$\overline{x}_甲=(7+7+8+9+8+9+10+9+9+9)\div10=8.5$,$\overline{x}_乙=(8+9+7+8+10+7+9+10+7+10)\div10=8.5$,甲的方差 $\sigma_甲^2=[2\times(7-8.5)^2+2\times(8-8.5)^2+(10-8.5)^2+5\times(9-8.5)^2]\div10=0.85$,乙的方差 $\sigma_乙^2=[3\times(7-8.5)^2+2\times(8-8.5)^2+2\times(9-8.5)^2+3\times(10-8.5)^2]\div10=1.45$,$\therefore\sigma_甲^2<\sigma_乙^2$,$\therefore$ 甲的射击成绩比乙稳定.]

9. 79 **10.** 45 **11.** 23 **12.** 75

13. (1)2 800 2 000 2 000 [平均数 $\overline{x}=\frac{12\ 000+8\ 000+2\ 000\times18}{20}=$ 2 800(元);众数是 2 000 元;中位数是

2 000 元.]

(2)**解**:不合适,理由如下:

因为公司中少数人的工资额与大多数人的工资额差别极大,这样导致平均工资与中位数偏差较大,所以平均数不能表示该公司职工月工资的"集中趋势".

14. (1)92　99　94　[$a=\frac{1}{10}\times(84+85+86+88+89+95+96+99+99+99)=92$(分);众数 b 为 99;九年级分数最中间的两个数据是 94,94,故中位数 $c=\frac{94+94}{2}=94$(分).]

(2)八　[∵八年级成绩的中位数为 92 分,九年级成绩的中位数为 94 分,而小明得了 93 分,但小明的成绩在其所在年级排名更靠前,∴小明同学是八年级的学生.]

(3)**解**:九年级学生掌握得更好,理由如下:

因为两个年级成绩的平均数相等,而九年级的中位数和众数均高于八年级的中位数和众数,所以九年级学生对"人工智能"的知识掌握得更好.

15. **解**:(1)6　7　[甲组学生成绩从小到大排列为 5,6,6,6,6,6,7,9,9,10,

∴中间两个数的平均数为 $\frac{6+6}{2}=6$,根据中位数定义,可知 $a=6$;∵乙组学生成绩中,数据 7 出现了四次,出现次数最多,∴众数 $b=7$.]

(2)乙　[∵乙组的方差比甲组小,

∴乙组队员在初赛中发挥的更稳定.]

(3)**解**:小瑜的说法是错的,理由如下:

因为两组的平均数相同,但乙组的中位数比甲组高,方差比甲组小,成绩更稳定,所以可以推荐乙组队员参赛.(答案不唯一,合理即可)