

# 参考答案

## 数学(人教版) 九年级上册

### 第二十五章 一元二次方程

#### 25.1 一元二次方程的概念

##### 【课堂导学】

###### 任务一

问题 1  $(40-2x)\text{cm}$   $(30-2x)\text{cm}$   $(40-2x)(30-2x)=600$   
 $x^2-35x+150=0$

问题 2  $(x-1)$   $\frac{x(x-1)}{2}$   $\frac{x(x-1)}{2}=36$   $x^2-x-72=0$

新知生成 (1)一个 整式 2 (2) $ax^2$   $a$   $bx$   $b$   $c$

##### 【即时测评】

1. C

2. 解: 去括号, 得  $x^2-x=4x+8$ . 移项、合并同类项, 得一般形式为  $x^2-5x-8=0$ .

它的二次项系数是 1, 一次项系数是 -5, 常数项是 -8.

###### 任务二

问题 1 解: 使一元二次方程左右两边相等的未知数的值, 就是这个一元二次方程的解, 一元二次方程的解也叫作一元二次方程的根.

问题 2 解: 将这些数代入后, 只有 -2 和 -3 满足等式, 所以 -2 和 -3 是一元二次方程  $2x^2+12=-10x$  的根.

问题 3  $a=4$ .

【归纳总结】 (1)原方程 相等 (2)原方程

##### 【即时测评】

1. D

2. 解: (1) 21 12 5 0 -3 -4 -3 0

(2) 观察表格, 一元二次方程  $x^2-4x=-3$  的根有  $x=1$  和  $x=3$ .

##### 【课堂小结】

等量 相等

##### 【课后评价】

1. D 2. A 3. -3 4. D 5. -82

6. 解: 将原方程化为一般形式为  $2x^2+(b-4)x+2-b+c=0$ , 所以  $b-4=-3$ ,  $2-b+c=-1$ , 解得  $b=1$ ,  $c=-2$ .

7. A 8. 2 026 9. B 10. D 11. B

12. -3 13.  $x^2-x-182=0$  14. 略

15. 解: (1) 一元二次方程  $2x^2+7x+5=0$  是“和谐方程”. 理由如下:

在一元二次方程  $2x^2+7x+5=0$  中,  $a=2$ ,  $b=7$ ,  $c=5$ .

$\therefore 2-7+5=0$ ,

$\therefore$  一元二次方程  $2x^2+7x+5=0$  是“和谐方程”.

(2)  $\therefore 3x^2-mx+n=0$  是关于  $x$  的“和谐方程”,

$\therefore 3-(-m)+n=0$ , 即  $3+m+n=0$ .

$\therefore -2$  是此“和谐方程”的一个根,

$\therefore 3 \times (-2)^2 - m \times (-2) + n = 0$ ,

即  $\begin{cases} 3+m+n=0, \\ 12+2m+n=0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} m=-9, \\ n=6. \end{cases}$

$\therefore m$  的值为 -9,  $n$  的值为 6.

#### 25.2 降次——解一元二次方程

##### 第 1 课时 直接开平方法

##### 【课堂导学】

###### 任务一

$6x^2$   $9 \times 6x^2=486$   $x^2=9$   $\pm 3$   $3$   $-3$   $x=3$   $x=-3$   $3$

新知生成 (1) 两个不相等 (2) 两个相等 (3) 无实数根

##### 【即时测评】

1. A

2. 解: (1) 两边都除以 3, 得  $x^2=\frac{1}{3}$ . 开方, 得  $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

$$\therefore x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 移项、合并同类项, 得  $6x^2=1.5$ . 两边都除以 6, 得

$$x^2=\frac{1}{4}, \text{开方, 得 } x=\pm\frac{1}{2}.$$

$$\therefore x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{2}.$$

###### 任务二

探究过程  $2x-1=\pm\sqrt{5}$   $2x-1=\sqrt{5}$   $2x-1=-\sqrt{5}$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

类比推理 3  $x+3=\pm 2$   $-1$   $-5$

新知生成 (1) 两个不相等  $\frac{-n+\sqrt{p}}{m}$   $\frac{-n-\sqrt{p}}{m}$

(2) 两个相等  $-\frac{n}{m}$  (3) 无实数根

##### 【即时测评】

1. A

2. 解:  $(2x-1)^2+4=0$ ,  $(2x-1)^2=-4<0$ ,  $\therefore$  原方程无解.

###### 任务三

例 解: (1) 将二次项系数化为 1, 得  $y^2=4$ , 解得  $y=\pm 2$ .  $\therefore y_1=2$ ,  $y_2=-2$ .

(2) 整理, 得  $(2x-1)^2=0$ ,  $2x-1=0$ .  $\therefore x_1=x_2=\frac{1}{2}$ .

【归纳总结】 (1) 完全平方 (2) 一元一次 (3) 一元一次

##### 【即时测评】

解: (1)  $2(x-8)^2-50=0$ .

移项, 并将系数化为 1, 得  $(x-8)^2=25$ .

$\therefore x-8=\pm 5$ , 即  $x-8=5$  或  $x-8=-5$ .

$\therefore x_1=13$ ,  $x_2=3$ .

(2)  $(x+3)^2=4(x-2)^2$ .

两边开平方, 得  $x+3=\pm 2(x-2)$ .

$\therefore x+3=2(x-2)$  或  $x+3=-2(x-2)$ ,

即  $x+3=2x-4$  或  $x+3=-2x+4$ .

$$\therefore x_1=7, x_2=\frac{1}{3}.$$

##### 【课堂小结】

$$x^2=p \quad (mx+n)^2=p$$

##### 【课后评价】

1. D 2. B

3.  $m>2$  4. 略 5. A 6. D 7.  $k\leq 0$

8.  $x_1=2$  028,  $x_2=-2$  026 9. 略

10. C 11. D 12. C

13. -1 14. 18

15. 解:  $\therefore a, b$  满足等式  $b=\sqrt{a-1}+\sqrt{1-a}+3$ ,  $a-1\geq 0$ ,  $1-a\geq 0$ ,  $\therefore a=1$ .

把  $a=1$  代入  $b=\sqrt{a-1}+\sqrt{1-a}+3$ , 得  $b=3$ .

∵一元二次方程  $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$  的一个根是 1,  
 $\therefore a+b+c=0$ .  
 又  $\because a=1, b=3$ ,  
 $\therefore c=-4$ .  
 $\therefore$  关于  $y$  的方程为  $\frac{1}{4}y^2-4=0$ , 解得  $y=\pm 4$ .  
 $\therefore$  方程  $\frac{1}{4}y^2+c=0$  的两个根分别为  $y_1=4, y_2=-4$ .

16. 略

## 第 2 课时 配方法

### 【课堂导学】

#### 任务一

问题 1 (1)  $\frac{9}{16}$   $\frac{3}{4}$  (2)  $\frac{9}{4}$   $\frac{3}{4}$   $\frac{3}{2}$

问题 2 解:  $\because x^2-2(m-3)x+25$  是一个完全平方,  
 $\therefore 2(m-3)=\pm 10$ , 解得  $m=8$  或  $m=-2$ .

[归纳总结] (1)  $x\pm\frac{k}{2}$  (2)  $x\pm p$

#### [即时测评]

1. B

2. -3, 5

#### 任务二

分析  $(x+6)$   $x(x+6)=16$   $x^2+6x-16=0$

解答  $\left(\frac{6}{2}\right)^2$  9 9 9  $(x+3)^2=25$   $x+3=\pm 5$

$x+3=5$   $x+3=-5$  2 -8

新知生成 完全平方 利用开平方实现降次

实践应用 解: 移项, 得  $3x^2-8x=3$ .

二次项系数化为 1, 得  $x^2-\frac{8}{3}x=1$ .

配方, 得  $x^2-\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2=1+\left(\frac{4}{3}\right)^2$ ,

即  $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$ .

开方, 得  $x-\frac{4}{3}=\pm\frac{5}{3}$ .  $\therefore x_1=3, x_2=-\frac{1}{3}$ .

[归纳总结] (1) 常数项 (2) 二次项系数 (3) 一半  
 (4) 开平方 无实数根 (5) 一元一次

#### [即时测评]

解: (1) 移项, 得  $x^2+6x=-5$ .

配方, 得  $x^2+6x+3^2=-5+3^2$ , 即  $(x+3)^2=4$ .

开方, 得  $x+3=\pm 2$ .

$\therefore x_1=-1, x_2=-5$ .

(2) 移项、二次项系数化为 1, 得  $x^2+2x=\frac{1}{2}$ .

配方, 得  $x^2+2x+1=\frac{1}{2}+1$ , 即  $(x+1)^2=\frac{3}{2}$ .

开方, 得  $x+1=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

$\therefore x_1=-1+\frac{\sqrt{6}}{2}, x_2=-1-\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

### 【课堂小结】

完全平方

### 【课后评价】

1. B 2. 4 3. 略 4. A 5. D 6. A 7. 3

8. 略 9. C 10. A 11. C

12.  $x^2+6x+4=0$

13.  $t_1=2\ 027, t_2=-2\ 025$

14. 解: (1)  $\because x^2+4x+y^2-2y+5=0$ ,  
 $\therefore (x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)=0$ ,

即  $(x+2)^2+(y-1)^2=0$ .

$\because (x+2)^2\geq 0, (y-1)^2\geq 0$ , 且和为 0,

$\therefore (x+2)^2=0$  且  $(y-1)^2=0$ .

$\therefore x=-2, y=1$ .

(2)  $\because a^2+b^2=8a+6b-25$ ,

$\therefore$  方程变形为  $(a-4)^2+(b-3)^2=0$ .

$\because (a-4)^2\geq 0, (b-3)^2\geq 0$ ,

$\therefore (a-4)^2=0$  且  $(b-3)^2=0$ .

$\therefore a=4, b=3$ .

$\because \triangle ABC$  为直角三角形,

$\therefore$  当  $a=4, b=3$  是直角边时,  $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$ ;

当  $a=4$  是斜边,  $b=3$  是直角边时,  $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$ .

$\therefore c=5$  或  $c=\sqrt{7}$ .

## 第 3 课时 公式法

### 【课堂导学】

#### 任务一

(1)  $-c -\frac{c}{a} \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \left(\frac{b}{2a}\right)^2 b^2-4ac \Delta \Delta=b^2-4ac$  (2) 两个不相等 两个相等 无

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$  求根公式

#### [即时测评]

1. C 2.  $4x^2+6x+1=0$

#### 任务二

探究 1 解: 根据题意, 得  $m\neq 0$  且  $(2m+3)^2-4m(m-3)>0$ , 解得  $m>-\frac{3}{8}$  且  $m\neq 0$ .

探究 2 解: 根据题意, 得  $m\neq 0$  且  $(2m+3)^2-4m(m-3)=0$ , 解得  $m=-\frac{3}{8}$ .

探究 3 解: 根据题意, 得  $m\neq 0$  且  $(2m+3)^2-4m(m-3)<0$ , 解得  $m<-\frac{3}{8}$ .

[归纳总结] (1)  $b^2-4ac$  (2) 0 (3)  $b^2-4ac$

#### [即时测评]

1. D 2. A

#### 任务三

例 解: (1)  $\because a=\sqrt{3}, b=-1, c=-2\sqrt{3}$ ,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times\sqrt{3}\times(-2\sqrt{3})=25>0$ .

方程有两个不相等的实数根  $x=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2\sqrt{3}}=\frac{1\pm 5}{2\sqrt{3}}$ .

$\therefore$  原方程的解为  $x_1=-\frac{2\sqrt{3}}{3}, x_2=\sqrt{3}$ .

(2) 将方程化为一般形式, 得  $3x^2-x+1=0$ .

$\because a=3, b=-1, c=1$ ,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times 3\times 1=-11<0$ .

$\therefore$  原方程无实数根.

[归纳总结] (1) 一般形式 (2)  $a, b, c$  (3)  $b^2-4ac$

(4)  $\geq 0 < 0$

#### [即时测评]

解: (1) 将方程化为一般形式, 得  $4x^2+12x+9=0$ .

$\because a=4, b=12, c=9$ ,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=12^2-4\times 4\times 9=0$ .

方程有两个相等的实数根  $x=\frac{-12\pm 0}{2\times 4}$ .

$\therefore x_1=x_2=-\frac{3}{2}$ .

(2) 将方程化为一般形式, 得  $x^2-2x-16=0$ .

$\because a=1, b=-2, c=-16$ ,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 4 + 64 = 68 > 0.$$

方程有两个不相等的实数根  $x = \frac{2 \pm 2\sqrt{17}}{2 \times 1} = 1 \pm \sqrt{17}$ .

$$\therefore x_1 = 1 + \sqrt{17}, x_2 = 1 - \sqrt{17}.$$

#### 【课堂小结】

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad b^2 - 4ac \quad \text{两个不相等的} \quad \text{两个相等的} \quad \text{无}$$

#### 【课后评价】

1. A 2. C 3.  $\pm 2$  4. 略 5. D 6. B 7. A

8.  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$  9. 略

10. C 11. A 12. B

13.  $-1 \leq k < 3$  14.  $1 + \sqrt{2}$

15. 解: (1) ⑤ 2, 2, 5 不能构成三角形

(2) ① 当  $m = 2$  时, 方程为  $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$ ,

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}.$$

当腰为  $\frac{1}{2}$  时,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ ,

$\therefore \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  不能构成三角形.

当腰为  $\frac{3}{2}$  时, 等腰三角形的三边长为  $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ ,

此时  $\triangle ABC$  的周长为  $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ .

$\therefore$  当  $m = 2$  时,  $\triangle ABC$  的周长为  $\frac{7}{2}$ .

② 若  $\triangle ABC$  为等边三角形, 则方程有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (-m)^2 - 4\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right) = m^2 - 2m + 1 = 0.$$

$$\therefore m_1 = m_2 = 1.$$

$\therefore$  当  $\triangle ABC$  为等边三角形时,  $m$  的值为 1.

### 第 4 课时 因式分解法

#### 【课堂导学】

##### 任务一

分析  $9.8x - 4.9x^2 = 0$

解答  $x = 0$   $9.8 - 4.9x = 0$  0 2 2 2 0 0

新知生成 0 因式分解 0 降次

##### [即时测评]

1. 0 0

2. (1)  $(x-2)(x+1)$   $x+1=0$  (2)  $3(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6})$   
 $y-\sqrt{6}=0$

##### 任务二

例 1 解: (1) 移项, 得  $3x(2x+1) - 2(2x+1) = 0$ .  
左边分解因式, 得  $(2x+1)(3x-2) = 0$ .

$$\therefore 2x+1=0, \text{ 或 } 3x-2=0. \therefore x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}.$$

(2) 移项、整理, 得  $4x^2 - 10x = 0$ .

左边分解因式, 得  $2x(2x-5) = 0$ .

$$\therefore 2x=0, \text{ 或 } 2x-5=0. \therefore x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2}.$$

[归纳总结] 左边 0 因式分解 一元一次 一元一次

##### [即时测评]

解: (1) 左边分解因式, 得  $x(x+1) = 0$ .

$$\therefore x=0, \text{ 或 } x+1=0. \therefore x_1 = 0, x_2 = -1.$$

(2) 左边分解因式, 得  $(2x+11)(2x-11) = 0$ .

$$\therefore 2x+11=0, \text{ 或 } 2x-11=0.$$

$$\therefore x_1 = -\frac{11}{2}, x_2 = \frac{11}{2}.$$

#### 任务三

例 2 解: (1)  $3x(x+2) = 5(x+2)$ .

移项, 得  $3x(x+2) - 5(x+2) = 0$ .

左边分解因式, 得  $(x+2)(3x-5) = 0$ .

$$\therefore x+2=0, \text{ 或 } 3x-5=0. \therefore x_1 = -2, x_2 = \frac{5}{3}.$$

(2)  $16(3x-2)^2 = (x+5)^2$ .

两边开平方, 得  $4(3x-2) = \pm(x+5)$ .

$$\therefore 4(3x-2) = x+5, \text{ 或 } 4(3x-2) = -(x+5).$$

$$\therefore x_1 = \frac{13}{11}, x_2 = \frac{3}{13}.$$

[归纳总结] (1) 直接开平方 因式分解 (2) 直接开平方

(3) 因式分解 (4) 公式 配方

##### [即时测评]

解: (1) 二次项系数化为 1, 得  $(x-2)^2 = \frac{49}{25}$ .

开方, 得  $(x-2) = \pm \frac{7}{5}$ .

$$\therefore x-2 = \frac{7}{5}, \text{ 或 } x-2 = -\frac{7}{5}.$$

$$\therefore x_1 = \frac{17}{5}, x_2 = \frac{3}{5}.$$

(2)  $\because a=4, b=-5, c=-7$ ,

$$\therefore \Delta = (-5)^2 - 4 \times 4 \times (-7) = 137 > 0.$$

方程有两个不相等的实数根  $x = \frac{5 \pm \sqrt{137}}{2 \times 4} = \frac{5 \pm \sqrt{137}}{8}$ .

$$\therefore x_1 = \frac{5 + \sqrt{137}}{8}, x_2 = \frac{5 - \sqrt{137}}{8}.$$

(3) 移项, 得  $(x-\sqrt{2})^2 + 5(x-\sqrt{2}) = 0$ .

左边分解因式, 得  $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+5) = 0$ .

$$\therefore x-\sqrt{2}=0, \text{ 或 } x-\sqrt{2}+5=0.$$

$$\therefore x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}-5.$$

#### 【课堂小结】

0 因式分解 直接开平方 公式

##### 【课后评价】

1. B 2. D 3. A 4. -2 或 1 5. 略

6. D 7. C 8.  $x^2 - 64 = 0$  (答案不唯一) 9. 略

10. D 11. C 12. -5 13. 24 14. 略

15. 解: (1) 降次

$$(2) ① x^4 - x^2 - 6 = 0.$$

设  $x^2 = a$ ,  $\therefore$  原方程化为  $a^2 - a - 6 = 0$ .

$$\therefore (a-3)(a+2) = 0, \text{ 解得 } a_1 = 3, a_2 = -2.$$

当  $a = 3$  时,  $a = x^2 = 3$ , 解得  $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$ ;

当  $a = -2$  时,  $a = x^2 = -2$ , 不符合题意, 舍去.

$\therefore$  原方程的根为  $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$ .

$$② (x^2 - x)^2 - 4(x^2 - x) - 12 = 0.$$

设  $x^2 - x = y$ ,

$\therefore$  原方程化为  $y^2 - 4y - 12 = 0$ .

$$\therefore (y-6)(y+2) = 0, \text{ 解得 } y_1 = 6, y_2 = -2.$$

当  $y = 6$  时,  $x^2 - x = 6$ , 即  $x^2 - x - 6 = 0$ ,

$$\therefore (x-3)(x+2) = 0,$$

解得  $x_1 = 3, x_2 = -2$ .

当  $y = -2$  时,  $x^2 - x = -2$ , 即  $x^2 - x + 2 = 0$ .

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 8 = -7 < 0, \therefore \text{此方程无解}.$$

$\therefore$  原方程的根为  $x_1 = 3, x_2 = -2$ .

### 第 5 课时 一元二次方程的根与系数的关系

#### 【课堂导学】

##### 任务一

探究 1  $\frac{3}{2} \quad -1 \quad \frac{1}{3} \quad 1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{1}{3}$

(1)解: 两根之和为一次项系数与二次项系数之比的相反数, 两根之积为常数项与二次项系数之比.

(2)解:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ .

探究 2  $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$   $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

探究 3  $x_1 + x_2$   $x_1 x_2$   $x_1 + x_2$   $x_1 x_2$

新知生成 (1)一次项 二次项 常数项 二次项

(2)  $-\frac{b}{a}$   $\frac{c}{a}$

[即时测评]

解: (1)  $x_1 + x_2 = 3$ ,  $x_1 x_2 = -1$ .

(2)  $x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$ ,  $x_1 x_2 = -\frac{5}{2}$ .

(3)  $x_1 + x_2 = 6$ ,  $x_1 x_2 = 0$ .

任务二

例 1 解: 将一元二次方程  $\frac{1}{3}x(x+3) = 3x+5$  整理, 得  $x^2 - 6x - 15 = 0$ .

$\therefore \alpha, \beta$  是一元二次方程  $\frac{1}{3}x(x+3) = 3x+5$  的两个实数根,

$\therefore \alpha + \beta = 6$ ,  $\alpha\beta = -15$ .

(1)  $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -15 \times 6 = -90$ .

(2)  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{6^2 - 2 \times (-15)}{-15} = -\frac{22}{5}$ .

[归纳总结] (1)一般 (2)  $-\frac{b}{a}$   $\frac{c}{a}$  (3)  $x_1 + x_2$

$x_1 x_2$  (4)整体

[即时测评]

解:  $\because x_1, x_2$  是方程  $2x^2 + 3x - 1 = 0$  的两个根,

$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$ ,  $x_1 x_2 = -\frac{1}{2}$ .

$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = 3$ ,

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$ .

任务三

例 2 解: (1) 当  $1 - m = 0$ , 即  $m = 1$  时,  $-2x + 1 = 0$ , 解得  $x = \frac{1}{2}$ .

当  $1 - m \neq 0$ ,  $\Delta = (-2)^2 - 4(1 - m) \geq 0$ ,

即  $m \geq 0$ , 且  $m \neq 1$  时, 方程有实数根.

综上所述, 当  $m \geq 0$  时, 方程有实数根.

(2) 由根与系数的关系, 得  $x_1 + x_2 = \frac{2}{1 - m}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{1}{1 - m}$ .

$\therefore x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 x_2 = 0$ ,

$\therefore (x_1 + x_2)^2 = -x_1 x_2$ , 即  $\left(\frac{2}{1 - m}\right)^2 = \frac{-1}{1 - m}$ .

化简, 得  $4 = m - 1$ , 解得  $m = 5$ .

经检验,  $m = 5$  是原方程的解. 故  $m$  的值为 5.

[归纳总结] (1)判别式 (2)整体 (3)0

[即时测评]

(1)证明:  $\because \Delta = [-(2m-1)]^2 - 4 \times 1 \times (-3m^2 + m) = 4m^2 - 4m + 1 + 12m^2 - 4m = 16m^2 - 8m + 1 = (4m-1)^2 \geq 0$ ,

$\therefore$  无论  $m$  为何值, 方程总有实数根.

(2)解: 根据题意, 得  $x_1 + x_2 = 2m - 1$ ,  $x_1 x_2 = -3m^2 + m$ .

$\therefore \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} - 2 = -\frac{5}{2}$ ,

$\therefore \frac{(2m-1)^2}{-3m^2 + m} - 2 = -\frac{5}{2}$ .

整理, 得  $5m^2 - 7m + 2 = 0$ , 解得  $m = 1$  或  $m = \frac{2}{5}$ .

经检验,  $m = 1$  或  $m = \frac{2}{5}$  是原方程的解. 故  $m$  的值为 1 或  $\frac{2}{5}$ .

【课堂小结】

$-\frac{b}{a}$   $\frac{c}{a} \geq 0$  (1)  $2x_1 x_2$  (2)  $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$

【课后评价】

1. D 2. C 3. 1 4. 略 5. D 6. A 7. 2 或 -1

8. 略 9. C 10. D 11. B 12. 10 13. 0 或 -2 14. 略

15. 解: (1)  $\because \square ABCD$  的两邻边的长  $m, n$  是关于  $x$  的方

程  $x^2 - kx + \frac{k}{2} - \frac{1}{4} = 0$  的两个实数根,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-k)^2 - 4 \times 1 \times \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{4}\right) \geq 0$ ,  $m +$

$n = k > 0$ ,  $mn = \frac{k}{2} - \frac{1}{4} > 0$ .

$\therefore (k-1)^2 \geq 0$ ,  $k > 0$ ,  $k > \frac{1}{2}$ ,

即  $k$  的取值范围是  $k > \frac{1}{2}$ .

(2)  $\because$  要使四边形是菱形, 则  $m = n$ , 即方程有两个相等的实数根,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-k)^2 - 4 \times 1 \times \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{4}\right) = 0$ ,

即  $k = 1$ .

$\therefore$  当  $k$  为 1 时, 四边形  $ABCD$  是菱形.

(3)  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形, 且四边形  $ABCD$  的对角线相等,

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形.  $\therefore \angle ABC = 90^\circ$ .

由勾股定理, 得  $m^2 + n^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$ , 即  $(m+n)^2 -$

$2mn = \frac{5}{2}$ .

$\therefore m + n = k$ ,  $mn = \frac{k}{2} - \frac{1}{4}$ ,

$\therefore k^2 - 2\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2}$ ,

解得  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = -1$ .

由(1), 得  $k > \frac{1}{2}$ ,  $\therefore k = 2$ .

把  $k = 2$  代入方程, 得  $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$ .

解得  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = \frac{3}{2}$ .

$\therefore m = \frac{1}{2}$ ,  $n = \frac{3}{2}$  或  $n = \frac{1}{2}$ ,  $m = \frac{3}{2}$ .

$\therefore$  矩形  $ABCD$  的周长是  $2 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 4$ , 面积是  $\frac{1}{2}$

$\times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ ,

即此时四边形  $ABCD$  的周长是 4, 面积是  $\frac{3}{4}$ .

## 25.3 实际问题与一元二次方程

### 第 1 课时 数字问题与几何图形问题

【课堂导学】

任务一

例 1 解: 设原来的两位数的十位上的数字为  $x$ , 则个位

上的数字为  $7-x$ .

根据题意, 得  $(10x+7-x)[10(7-x)+x]=1\ 300$ ,

解得  $x_1=2, x_2=5$ .

当  $x=2$  时,  $7-x=5$ , 原来的两位数为 25;

当  $x=5$  时,  $7-x=2$ , 原来的两位数为 52.

答: 原来的两位数为 25 或 52.

**[归纳总结]**

(1)未知 方程 方程 解 检验

(2) $10b+a$

**[即时测评]**

**解:** 设较小的奇数为  $x$ . 根据题意可列方程为

$x(x+2)=323$ ,

解得  $x_1=17, x_2=-19$ .

故当较小奇数为 17 时, 较大奇数为 19.

当较小奇数为  $-19$  时, 较大奇数为  $-17$ .

**任务二**

**例 2 解:** (1)与墙垂直的一边长为  $x$  m, 则平行于墙的一边使用的篱笆的长度为  $(25+1-2x)$  m, 即  $(26-2x)$  m.

(2)根据题意, 得  $x(26-2x)=80$ , 解得  $x_1=5, x_2=8$ .

当  $x=5$  时,  $26-2x=26-2\times 5=16>12$  (不符合题意, 舍去);

当  $x=8$  时,  $26-2x=26-2\times 8=10<12$ , 符合题意.

答:  $x$  的值为 8.

**[归纳总结]** (1)宽 (2)含未知数 (3)面积 (4)实际

**[即时测评]**

**解:** (1)设  $AB=x$  m, 则  $BC=(100-4x)$  m.

根据题意, 得  $x(100-4x)=400$ ,

即  $x^2-25x+100=0$ ,

解得  $x_1=20, x_2=5$ .

$\because 100-4x\leq 60$ ,

$\therefore x\geq 10. \therefore x$  应取 20.

$\therefore AB=20$  m,  $BC=100-4\times 20=20$  (m).

答: 菜园的边  $AB$  的长为 20 m,  $BC$  的长为 20 m.

(2)不能.理由如下:

设  $AB=y$  m 时, 菜园的总面积为  $640$  m<sup>2</sup>.

根据题意, 得  $y(100-4y)=640$ ,

即  $y^2-25y+160=0$ .

$\therefore a=1, b=-25, c=160$ ,

$\therefore b^2-4ac=(-25)^2-4\times 1\times 160=-15<0$ .

$\therefore$  方程无实数根.

$\therefore$  菜园的总面积不能达到  $640$  m<sup>2</sup>.

**[课堂小结]**

(1)未知 (2)未知 (3)等量 (4)根 (5)题意 (6)实际 勾股 面积

**[课后评价]**

1. D 2. 略 3. C 4. D 5. 5

6. **解:** 设小路的宽度为  $x$  m.

根据题意, 得  $(12-3x)(6-2x)=36$ ,

解得  $x_1=1, x_2=6$  (不符合题意, 舍去).

答: 小路的宽度为 1 m.

7. D 8. 144 9. 略

10. **解:** (1) $(60-2x)(24-2x)=832$

(2)能.设剪去的正方形的边长为  $y$  cm, 则折成的长方

体盒子的底面为长  $(\frac{60}{2}-y)$  cm、宽  $(24-2y)$  cm 的矩形.

根据题意, 得  $(\frac{60}{2}-y)(24-2y)=486$ ,

解得  $y_1=3, y_2=39$  (不符合题意, 舍去).

$\therefore$  盒子的体积为  $486\times 3=1\ 458$  (cm<sup>3</sup>).

答: 能折出底面积为  $486$  cm<sup>2</sup> 的有盖盒子, 盒子的体

积为  $1\ 458$  cm<sup>3</sup>.

## 第 2 课时 传播问题与平均变化率问题

**【课堂导学】**

**任务一**

(1) $x$   $(x+1)$  (2) $x$   $(x+1)(x+1)$   $(x+1)^2=256$   
 $x=15$  或  $x=-17$  (舍去) 15

**[归纳总结]** (1)第二轮被传染数 (2)传播源的数量 次数

**[即时测评]**

**解:** (1)设平均每人每轮感染  $x$  人.

根据题意, 得  $1+x+x(x+1)=361$ ,

解得  $x_1=18, x_2=-20$  (不符合题意, 舍去).

答: 平均每人每轮感染 18 人.

(2)根据题意, 得  $361+361\times 18\times a\%=10\times 361$ ,

解得  $a=50$ .

**任务二**

(1) $4\ 000(1-x)$   $4\ 000(1-x)^2$   $4\ 000(1-x)^2=1\ 440$   
 $x_1=0.4, x_2=1.6$  (不符合题意, 舍去) 40%

(2) $5\ 500(1-y)^2=2\ 695$   $y_1=0.3, y_2=1.7$  (不符合题意, 舍去) 甲

**[归纳总结]** (1) $a(1+x)^2$   $a(1+x)^n$  (2) $a(1-x)^2$   
 $a(1-x)^n$

**[即时测评]**

**解:** (1)设该商场投入资金的月平均增长率为  $x$ .

根据题意, 得  $20(1+x)^2=24.2$ ,

解得  $x_1=0.1=10\%, x_2=-2.1$  (不符合题意, 舍去).

答: 该商场投入资金的月平均增长率为 10%.

(2) $24.2\times (1+10\%)=26.62$  (万元).

答: 预计该商场 7 月投入资金将达到 26.62 万元.

**【课堂小结】**

$a(1\pm x)^n$

**【课后评价】**

1. C 2. 略 3. A 4. C 5. 20%

6. 略 7. A 8. 10% 9. 略

10. **解:** (1)设这个增长率为  $x$ .

由题意, 得  $320(1+x)^2=500$ ,

解得  $x_1=-2.25$  (不符合题意, 舍去),  $x_2=0.25=25\%$ .

答: 这个增长率为 25%.

(2)设重建后的养鸡场的宽  $AB$  为  $y$  m, 则  $BC$  的长为  $(40+2\times 2-3y)$  m.

由题意, 得  $y(40+2\times 2-3y)=160$ ,

整理, 得  $3y^2-44y+160=0$ ,

解得  $y_1=\frac{20}{3}, y_2=8$ .

当  $y=\frac{20}{3}$  时,  $BC$  的长为  $40+2\times 2-3y=40+2\times 2-$

$3\times \frac{20}{3}=24$  (m) $>22$  m, 不符合题意, 舍去;

当  $y=8$  时,  $BC$  的长为  $40+2\times 2-3y=40+2\times 2-$   
 $3\times 8=20$  (m) $<22$  m, 符合题意.

$\therefore AB=8$  m.

答: 重建后的养鸡场的宽  $AB$  为 8 m.

## 第 3 课时 球赛(握手)问题与其他问题

**【课堂导学】**

**任务一**

**例 1 解:** (1)若参加聚会的人数为 3, 则共握手  $\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$  (次); 若参加聚会的人数为 6, 则共握手  $\frac{1}{2}\times 6\times 5=15$  (次).

故答案为 3; 15.

$$(2) \frac{1}{2}n(n-1)$$

(3) 设有  $x$  人参加聚会. 根据题意, 得  $\frac{1}{2}x(x-1)=45$ ,

解得  $x_1=10$ ,  $x_2=-9$  (不符合题意, 舍去).

答: 参加聚会的有 10 人.

[即时测评]

解: 设共有  $x$  支球队参加比赛.

根据题意, 得  $x(x-1)=110$ ,

解得  $x_1=11$ ,  $x_2=-10$  (不符合题意, 舍去).

答: 共有 11 支球队参加比赛.

[归纳总结]  $\frac{n(n-1)}{2}$   $n(n-1)$

## 任务二

例 2 解: (1) 设每束鲜花的售价下降  $x$  元.

根据题意, 得  $(80-50-x)(30+2x)=1\ 000$ .

解得  $x_1=10$ ,  $x_2=5$ .

$\because$  店主希望尽量减少库存,  $\therefore x$  应取 10.

答: 每束鲜花应降价 10 元.

(2) 不能. 理由如下:

设每束鲜花的售价下降  $m$  元.

根据题意, 得  $(80-50-m)(30+2m)=1\ 200$ .

整理, 得  $m^2-15m+150=0$ .

$\because (-15)^2-4\times 1\times 150=-375<0$ ,

$\therefore$  方程无解,  $\therefore$  不能达成这个“小目标”.

[即时测评]

解: 设售价应提高  $x$  元. 根据题意,

$$\text{得 } (200-150+x)\left(200-\frac{10}{5}x\right)=11\ 200,$$

解得  $x_1=30$ ,  $x_2=20$ .

当  $x=30$  时,  $200+x=230$ ; 当  $x=20$  时,  $200+x=220$ .

$11\ 200\div(230-150)=140$  (双),  $11\ 200\div(220-150)=160$  (双).

答: 按每双皮鞋 220 元出售时, 应购进 160 双皮鞋; 按每双皮鞋 230 元出售时, 应购进 140 双皮鞋.

## 【课堂小结】

(1) 售价 (2) 利润 (3) 售价 (4) 单件利润

## 【课后评价】

1. D 2. 15

3. 解: 设该校数学社团共有  $x$  名九年级学生.

由题意, 得  $\frac{1}{2}x(x-1)=55$ .

整理, 得  $x^2-x-110=0$ ,

解得  $x_1=11$ ,  $x_2=-10$  (不符合题意, 舍去).

答: 该校数学社团共有 11 名九年级学生.

4. D 5. 3 或 4 6. 略 7. B 8. 4 9. 略 10. 略

11. 解: (1) 由题意, 得 5 个人需比赛  $\frac{5\times(5-1)}{2}=10$  (局).

(2) 小哲说的有道理. 理由如下:

设有  $x$  人报名参加.

由题意, 得  $\frac{x(x-1)}{2}=70$ .

整理, 得  $x^2-x-140=0$ , 解得  $x=\frac{1\pm\sqrt{561}}{2}$ .

$\because x$  不为整数,

$\therefore$  方程的解不符合实际, 小哲说的有道理.

(3) 设有一人比赛了  $n$  场后退出比赛.

由题意, 得  $\frac{(x-1)(x-2)}{2}+n=70$ .

整理, 得  $x^2-3x+2n-138=0$ ,

$$\text{解得 } x=\frac{3\pm\sqrt{561-8n}}{2}.$$

当  $n=4$  时,  $x=13$ , 符合题意,

$\therefore$  共有 13 名参赛者报名本次比赛.

# 第二十六章 二次函数

## 26.1 二次函数的概念

### 【课堂导学】

#### 任务一

$$(1) y=6x^2 \quad (2) y=\pi x^2+5 \quad (3) d=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n$$

$$(4) y=30x^2+60x+30$$

问题探究 整 二次 不为 0

新知生成  $y=ax^2+bx+c$   $a, b, c$

[即时测评]

1. C 2. -2 8 -8

#### 任务二

探究 1 解:  $y=(x-40)[500-10(x-50)]=-10x^2+1\ 400x-40\ 000(50\leq x\leq 100)$ .

探究 2 解: 根据题意, 得  $-10x^2+1\ 400x-40\ 000=8\ 000$ .

化简, 得  $x^2-140x+4\ 800=0$ , 解得  $x_1=60$ ,  $x_2=80$ .

$\therefore$  要吸引更多的顾客,

$\therefore$  售价应定为 60 元.

[归纳总结] (1) 等量 (2) 一般 (3) 实际

[即时测评]  $y=-2x^2+40x$   $7.5\leq x\leq 20$

#### 任务三

例 D

[即时测评] 1

[归纳总结] (1) 2 0 (2) 方程 不等式

### 【课堂小结】

① 变量 ② 等量 ③ 自变量

### 【课后评价】

1. A 2. -5 3. 略 4. A 5.  $m=n^2-n$

6. 略 7. C 8. D 9. 一次函数 二次函数 10. 略

11. 解: (1)  $\because OE=CD=80$  m,  $OC=ED=100$  m,  $AE=60$  m,  $BC=70$  m,

$\therefore OA=20$  m,  $OB=30$  m.

$\therefore$  点 A, B 的坐标分别为 (0, 20), (30, 0).

设直线 AB 的函数解析式为  $y=kx+b$  ( $k\neq 0$ ), 则

$$\begin{cases} 30k+b=0, \\ b=20, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k=-\frac{2}{3}, \\ b=20. \end{cases}$$

$\therefore$  直线 AB 的函数解析式为  $y=-\frac{2}{3}x+20$ .

(2) 设点 P 的横坐标为  $x$ .

$\because$  点 P 在线段 AB 上,

$\therefore$  点 P 的坐标可以表示为  $\left(x, -\frac{2}{3}x+20\right)$ .

$\therefore PK=100-x$ ,  $PH=80-\left(-\frac{2}{3}x+20\right)=60+\frac{2}{3}x$ .

$\therefore S=(100-x)\left(60+\frac{2}{3}x\right)$ ,

即  $S=-\frac{2}{3}x^2+\frac{20}{3}x+6\ 000(0\leq x\leq 30)$ .

## 26.2 二次函数的图象和性质

### 第 1 课时 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

#### 【课堂导学】

#### 任务一

探究 1 略

## 探究2 略

[归纳总结]  $x$  轴  $y$  轴 相反

[即时测评]

1. B

2. 解: ①  $y = x^2$ , ②  $y = \frac{1}{2}x^2$ , ③  $y = -2x^2$ .

## 任务二

例 解: (1)  $\because$  函数  $y = (m+1)x^{m^2+2m}$  是关于  $x$  的二次函数,  
 $\therefore m^2 + 2m = 2$ ,  $m+1 \neq 0$ ,

解得  $m_1 = -1 + \sqrt{3}$ ,  $m_2 = -1 - \sqrt{3}$ .

(2)  $\because m = -1 \pm \sqrt{3}$ ,

$\therefore m+1 = \sqrt{3}$  或  $-\sqrt{3}$ .

当  $m+1 = \sqrt{3}$ , 即  $m = -1 + \sqrt{3}$  时, 抛物线有最低点, 该点坐标为  $(0, 0)$ ; 此时, 当  $x > 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大.

(3) 当  $m+1 = -\sqrt{3}$ , 即  $m = -1 - \sqrt{3}$  时, 函数有最大值, 最大值是 0; 此时, 当  $x > 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小.

[即时测评]

1. B

2. 解: (1) 由  $y = (k+2)x^{k^2+k-4}$  是关于  $x$  的二次函数, 且当  $x > 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 得  $k+2 > 0$ ,  $k^2 + k - 4 = 2$ ,  $\therefore k = 2$ .

(2) 由 (1) 得二次函数的解析式为  $y = 4x^2$ ,

抛物线  $y = 4x^2$  的顶点坐标是  $(0, 0)$ , 对称轴是  $y$  轴.

## 【课堂小结】

向上 向下  $y$  轴  $(0, 0)$  减小 增大 增大 减小

$y$  最小值  $y$  最大值

## 【课后评价】

1. C 2. C 3. 9 4. 略 5. C 6. D 7.  $y = -x^2$

8. 解: (1)  $\because$  函数  $y = (m+3)x^2$ , 当  $x > 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小, 当  $x < 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大,  
 $\therefore m+3 < 0$ , 解得  $m < -3$ .

(2)  $\because$  抛物线  $y = (m+2)x^2$  与抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2$  的形状相同,

$\therefore m+2 = \pm \frac{1}{2}$ , 解得  $m = -\frac{5}{2}$  或  $m = -\frac{3}{2}$ .

9. A 10. B 11. C 12.  $y = 2x^2$  13. 略

14. 解: (1) 令  $y_1 = y_2$ ,

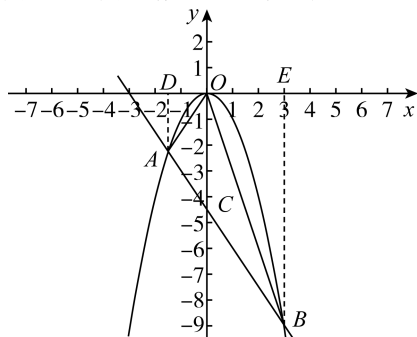
则  $-x^2 = -\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ , 解得  $x_1 = -\frac{3}{2}$ ,  $x_2 = 3$ .

当  $x = -\frac{3}{2}$  时,  $y = -\frac{9}{4}$ ;

当  $x = 3$  时,  $y = -9$ ,

$\therefore$  点 A 的坐标为  $(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ , 点 B 的坐标为  $(3, -9)$ .

(2) 如图, 设直线 AB 交  $y$  轴于点 C, 过点 A 作  $AD \perp x$  轴于点 D, 过点 B 作  $BE \perp x$  轴于点 E.



当  $x = 0$  时,  $y_2 = -\frac{9}{2}$ ,

$\therefore OC = \frac{9}{2}$ ,  $DE = OD + OE = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$ .

$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC}$

$= \frac{1}{2} OC \cdot DE$

$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{9}{2}$

$= \frac{81}{8}$ .

(3) 存在.

$\because$  点 A 的坐标为  $(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ,  $\therefore OA = \frac{3\sqrt{13}}{4}$ .

当  $OP = OA = \frac{3\sqrt{13}}{4}$  时,  $P_1(-\frac{3\sqrt{13}}{4}, 0)$ ,

$P_2(\frac{3\sqrt{13}}{4}, 0)$ .

当  $OA = AP$  时,  $P_3(-3, 0)$ .

当  $PA = PO$  时, 设  $P(a, 0)$ ,

$\therefore (a + \frac{3}{2})^2 + (\frac{9}{4})^2 = a^2$ ,  $\therefore a = -\frac{39}{16}$ .

$\therefore P_4(-\frac{39}{16}, 0)$ .

综上所述, 点 P 的坐标为  $(-\frac{3\sqrt{13}}{4}, 0)$  或  $(\frac{3\sqrt{13}}{4}, 0)$  或  $(-3, 0)$  或  $(-\frac{39}{16}, 0)$ .

## 第2课时 二次函数 $y = ax^2 + k$ 的图象和性质

### 【课堂导学】

#### 任务一

#### 探究1 略

探究2 向下  $(0, 1)$   $y$  轴 向下  $(0, -1)$   $y$  轴

探究3 上  $y = -2x^2 + 1$  下  $y = -2x^2 - 1$

[即时测评]

解: (1) 根据抛物线平移的知识, 可知  $y = 3x^2 - 1$  向上平移 1 个单位长度才能得到抛物线  $y = 3x^2$ .

(2)  $> 0$   $= 0$   $-1$   $(0, -1)$   $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$  和  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$

(3) 抛物线  $y = 3x^2 + 1$  的开口向上, 对称轴为  $y$  轴, 顶点坐标为  $(0, 1)$ .

#### 任务二

例 解:  $\because$  抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2 + (5-m)x + m - 3$  的对称轴是  $y$  轴,

$\therefore 5 - m = 0$ , 解得  $m = 5$ .

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ .

$\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(0, 2)$ .

[即时测评]

解: 设  $C(0, m)$ ,

则平移后的抛物线的函数解析式为  $y = \frac{1}{2}x^2 + m$ ,  $OC = -m$ .

由对称性, 可得  $AC = BC$ ,  $\therefore \angle ACB = 90^\circ$ .

$\because OC \perp AB$ ,  $\therefore OC = OA = OB = \frac{1}{2}AB$ .

$\therefore B(-m, 0)$ .

把  $x = -m$ ,  $y = 0$  代入  $y = \frac{1}{2}x^2 + m$ , 得  $\frac{1}{2}(-m)^2 + m = 0$ ,

$\therefore m_1 = -2$ ,  $m_2 = 0$  (舍去).

∴原抛物线应向下平移2个单位长度.

[归纳总结] (1)一次 (2)加 减

【课堂小结】

向上 向下  $y$  轴  $(0, k)$  减小 增大 增大 减小  
 $k$   $k$

【课后评价】

1. A 2. B 3. C 4. B 5.  $y = -x^2 - 2$  (答案不唯一)

6. -5 7. 略 8. D 9. D 10. D 11. 8 12. -2

13. 解: (1) ∵  $A(0, 1)$  为抛物线的顶点,

∴ 抛物线的对称轴为  $y$  轴.

∴ 矩形  $CDEF$  的顶点  $C, F$  在抛物线上,

∴  $BC = BF$ .

∴ 矩形  $CDEF$  的面积为  $CF \cdot OB = 8$ ,

∴  $CF = \frac{8}{OB} = \frac{8}{2} = 4$ . ∴  $BC = BF = 2$ .

∴ 点  $F$  的坐标为  $(2, 2)$ .

设抛物线的函数解析式为  $y = ax^2 + 1$ .

把  $(2, 2)$  代入解析式, 得  $2 = 4a + 1$ , 解得  $a = \frac{1}{4}$ .

∴ 抛物线的函数解析式为  $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ .

(2) ∵ 抛物线开口向上, 对称轴为  $y$  轴,

∴ 当  $x = 0$  时,  $y$  取最小值 1.

∵  $3 - 0 > 0 - (-1)$ ,

∴ 当  $x = 3$  时,  $y$  取最大值.

把  $x = 3$  代入  $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ , 得  $y = \frac{13}{4}$ .

∴  $1 \leq y \leq \frac{13}{4}$ .

(3) 把  $y = 3$  代入  $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ , 得  $3 = \frac{1}{4}x^2 + 1$ ,

解得  $x = -2\sqrt{2}$  或  $x = 2\sqrt{2}$ .

∴  $y > 3$  时,  $x < -2\sqrt{2}$  或  $x > 2\sqrt{2}$ .

### 第3课时 二次函数 $y = a(x-h)^2$ 的图象和性质

【课堂导学】

任务一

探究1 略

探究2 向上  $(-1, 0)$   $x = -1$  向上  $(1, 0)$   $x = 1$

探究3 左  $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$  右  $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$

[归纳总结] 形状 位置  $|h|$  加 减

[即时测评]

解: (1) 画出函数图象略.

函数  $y_1 = -\frac{1}{4}x^2$  的图象开口向下, 对称轴是  $y$  轴, 顶点坐标是  $(0, 0)$ ;

函数  $y_2 = -\frac{1}{4}(x+2)^2$  的图象开口向下, 对称轴是直线  $x = -2$ , 顶点坐标是  $(-2, 0)$ ;

函数  $y_3 = -\frac{1}{4}(x-2)^2$  的图象开口向下, 对称轴是直线  $x = 2$ , 顶点坐标是  $(2, 0)$ .

(2) 由函数  $y_1$  的图象向左平移2个单位长度得到函数  $y_2$  的图象; 由函数  $y_1$  的图象向右平移2个单位长度得到函数  $y_3$  的图象.

(3)  $=$   $=$   $>$

任务二

例 解: (1) 二次函数  $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2$  的图象的顶点坐标为  $(-1, 0)$ , 把点  $(-1, 0)$  向右平移2个单位得到点的

坐标为  $(1, 0)$ ,

∴ 原二次函数的解析式为  $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2$ .

∴  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $h = 1$ .

(2) 二次函数  $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2$  的图象开口向下, 对称轴为直线  $x = 1$ , 顶点坐标为  $(1, 0)$ .

[即时测评]

解: (1) 设抛物线的函数解析式为  $y = a(x-1)^2$ .

∵ 抛物线  $y = a(x-1)^2$  与  $y = -2(x+3)^2$  的图象形状相同, 但开口方向不同,

∴  $a = 2$ . ∴ 抛物线的函数解析式为  $y = 2(x-1)^2$ .

(2) 对于二次函数  $y = -2(x+3)^2$ , 当  $x = -3$  时,  $y_{\text{最大值}} = 0$ ; 而二次函数  $y = 2(x-1)^2$ , 当  $x = 1$  时,  $y_{\text{最小值}} = 0$ .

【课堂小结】

向上 向下  $x = h$   $(h, 0)$  减小 增大 增大 减小  
 $x = h$   $x = h$

【课后评价】

1. B 2. B 3. D 4.  $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$  5.  $y_1 > y_3 > y_2$

6.  $h \leq 3$  7. 略 8. B 9. D 10. B

11.  $y = -2(x+1)^2$  12. 0 或 7 13. 略

14. 解: (1) 联立  $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1, \\ y = \frac{1}{2}(x-4)^2, \end{cases}$

解得  $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x_2 = 7, \\ y_2 = \frac{9}{2} \end{cases}$ .

∴  $B(2, 2)$ ,  $C(7, \frac{9}{2})$ .

(2) 当  $y_1 > y_2$  时,  $2 < x < 7$ .

(3) 将  $y_1 = 0$  代入, 得  $x = -2$ , ∴  $D(-2, 0)$ .

∴  $y_2 = \frac{1}{2}(x-4)^2$ ,

∴ 对称轴为直线  $x = 4$ . ∴  $A(4, 0)$ . ∴  $AD = 6$ .

∴  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 6 \times y_C - \frac{1}{2} \times 6 \times y_B$   
 $= \frac{27}{2} - \frac{12}{2} = \frac{15}{2}$ , 即  $S_{\triangle ABC} = \frac{15}{2}$ .

### 第4课时 二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质

【课堂导学】

任务一

探究1 略

探究2 向上  $x = -1$   $(-1, -1)$

探究3 左 1 下 1

[归纳总结] (1) ①  $> 0$   $< 0$  ②  $x = h$  ③  $(h, k)$

(2) 形状 位置  $h$   $k$

[即时测评]

1. D

2.

| 二次函数                | 开口方向 | 对称轴      | 顶点坐标      |
|---------------------|------|----------|-----------|
| $y = 2(x+3)^2 + 5$  | 向上   | $x = -3$ | $(-3, 5)$ |
| $y = -3(x-1)^2 - 2$ | 向下   | $x = 1$  | $(1, -2)$ |
| $y = 4(x-3)^2 + 7$  | 向上   | $x = 3$  | $(3, 7)$  |
| $y = -5(2-x)^2 - 6$ | 向下   | $x = 2$  | $(2, -6)$ |

$$3. y_2 < y_1 < y_3$$

[交流总结]

3 代入比较法、增减比较法、距离比较法

## 任务二

**例 解:** (1) 将抛物线  $y=2x^2$  先向下平移 5 个单位长度, 再向左平移  $a(a>0)$  个单位长度得到  $y=2(x+a)^2-5$ , 代入点  $(1, 3)$ , 得  $3=2(1+a)^2-5$ , 解得  $a=1$  或  $a=-3$  (舍去),  $\therefore$  新抛物线的函数解析式为  $y=2(x+1)^2-5$ .

(2)  $\because$  关于  $y$  轴对称的点纵坐标不变, 横坐标互为相反数,  $\therefore$  抛物线  $y=2(x+1)^2-5$  关于  $y$  轴对称的图象所对应的函数解析式为  $y=2(-x+1)^2-5$ , 即  $y=2(x-1)^2-5$ .

[归纳总结]  $y=a(x-h)^2$   $y=ax^2+k$

[即时测评]

$$1. D \quad 2. -3 \quad 3. y=-4(x+2)^2-2$$

## 【课堂小结】

向上 向下 直线  $x=h$  ( $h, k$ ) 减小 增大 增大 减小  $k$   $y$  最大值

## 【课后评价】

$$1. B \quad 2. C \quad 3. ③ \quad 4. 略$$

$$5. D \quad 6. A \quad 7. B \quad 8. -\frac{1}{2} \text{ 或 } 4 \quad 9. 略$$

10. **解:** (1) 由题意知,  $L_1$  所在抛物线的顶点为  $(2, \frac{1}{2})$ ,

且过点  $A(0, 2)$ ,

$\therefore$  设其对应的函数解析式为  $y=a(x-2)^2+\frac{1}{2}$ ,

$$\therefore 2=a(0-2)^2+\frac{1}{2}, \text{ 解得 } a=\frac{3}{8}.$$

$$\therefore L_1 \text{ 所在抛物线的函数解析式为 } y=\frac{3}{8}(x-2)^2+\frac{1}{2}.$$

(2)  $\because$  点  $M_1, M_2$  到  $OA$  的距离均为 3 m,

$$\text{当 } x=3 \text{ 时, } y=\frac{3}{8} \times (3-2)^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{8},$$

$$y=-\frac{1}{16} \times 3^2=-\frac{9}{16}.$$

$$\therefore M_2 N_2 = M_1 N_1 = \frac{7}{8} - \left(-\frac{9}{16}\right) = \frac{23}{16} (\text{m}).$$

$$\therefore \frac{23}{16} \times 2 = \frac{23}{8} (\text{m}).$$

$$\therefore \text{这两条灯带的总长为 } \frac{23}{8} \text{ m}.$$

## 第 5 课时 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

### 【课堂导学】

#### 任务一

抛物线 上  $x=6$  ( $6, 3$ )

探究 1 略

探究 2 没有 不能 对称 顶点

$$\text{探究 3 } \frac{1}{2}(x-6)^2+3 \quad x=6 \quad (6, 3)$$

作图略

$$\text{新生成 } a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \quad x=-\frac{b}{2a} \quad \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

[即时测评]

**解:** (1)  $y=-x^2+4x+5=-x^2+4x-4+4+5=-(x-2)^2+9$ .

(2)  $\because a=-1<0$ ,

$\therefore$  抛物线开口向下, 顶点坐标为  $(2, 9)$ , 对称轴为直线  $x=2$ .

(3)  $\because$  抛物线的对称轴为直线  $x=2$ , 且  $x_1>x_2>2$ ,  $\therefore$  点  $A, B$  在对称轴的右侧.  $\because a=-1<0$ ,  $\therefore$  抛物线的开口向

下, 在对称轴的右侧  $y$  随  $x$  的增大而减小.  $\therefore y_1<y_2$ .

## 任务二

### 例 B

[即时测评]

$$1. D \quad 2. A \quad 3. ①③④$$

[归纳总结] 上 下  $y$  轴 左侧 右侧 原点 正 负

## 【课堂小结】

$$\begin{array}{llll} \text{向上} & \text{向下} & x=-\frac{b}{2a} & \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{减小} & \text{增大} \\ \text{增大} & \text{减小} \end{array} \quad \frac{4ac-b^2}{4a} \quad x=-\frac{b}{2a}$$

## 【课后评价】

$$1. B \quad 2. C \quad 3. ④ \quad 4. 略 \quad 5. A \quad 6. ④⑤ \quad 7. D$$

$$8. \frac{21}{4} \quad 9. ①② \quad 10. 略$$

11. **解:** (1)  $(1, 0)$

$$(2) ① \text{ 由题意可得 } y=x^2+4x-1=(x+2)^2-5,$$

$\therefore$  将此函数的图象先向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度后得  $y=(x+2-1)^2-5+1=(x+1)^2-4=x^2+2x-3$ .

$\therefore$  得到的图象对应的函数的特征数为  $[2, -3]$ .

②  $\because$  一个二次函数的特征数为  $[2, 3]$ ,

$\therefore$  该函数解析式为  $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$ .

$\because$  一个二次函数的特征数为  $[3, 4]$ ,

$$\therefore \text{函数解析式为 } y=x^2+3x+4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}.$$

$\therefore$  将原函数的图象先向左平移  $\frac{1}{2}$  个单位长度, 再向下平

移  $\frac{1}{4}$  个单位长度, 所得图象对应函数的特征数为  $[3, 4]$ .

## 26.3 二次函数与一元二次方程

### 第 1 课时 二次函数与一元二次方程(1)

### 【课堂导学】

#### 任务一

**探究 1 解:** 二次函数图象与  $x$  轴有可能有 2 个公共点、1 个公共点或没有公共点; 若有, 则其公共点的纵坐标都为 0; 对于二次函数解析式, 可令  $y=0$ , 通过解一元二次方程求其公共点的横坐标.

**探究 2 解:** ①  $y=x^2-x+1$  的图象与  $x$  轴无公共点, 相应的一元二次方程  $x^2-x+1=0$  无实数根;

②  $y=x^2-6x+9$  的图象与  $x$  轴有 1 个公共点, 解一元二次方程  $x^2-6x+9=0$ , 得  $x_1=x_2=3$ , 故公共点的横坐标为 3;

③  $y=x^2+x-2$  的图象与  $x$  轴有 2 个公共点, 解一元二次方程  $x^2+x-2=0$ , 得  $x_1=1, x_2=-2$ , 故公共点的横坐标分别为 -2, 1.

[交流总结] **解:** 二次函数  $y=ax^2+bx+c$  的图象与  $x$  轴的位置关系有三种: 没有公共点、有一个公共点、有两个公共点. 这对应着一元二次方程  $ax^2+bx+c$  的根的三种情况: 无实数根、有两个相等的实数根、有两个不相等的实数根.

[即时测评]

$$1. C \quad 2. 5$$

## 任务二

$$\text{例 解: (1) } \because y \text{ 与 } x \text{ 之间的关系式是 } y=-\frac{1}{15}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{8}{5},$$

$$\text{令 } y=0, \text{ 解方程 } -\frac{1}{15}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{8}{5}=0, \text{ 得 } x_1=12, x_2=-2 (\text{舍去}).$$

$\therefore$  铅球掷出的水平距离为 12 m.

(2)不能.

令  $y=4$ , 得  $-\frac{1}{15}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{5} = 4$ ,

化简后为  $x^2 - 10x + 36 = 0$ ,

此时  $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 144 < 0$ ,

$\therefore$  原方程无实数根.

$\therefore$  铅球的行进高度不能达到 4 m.

【归纳总结】(1)函数 一元二次 (2)一元二次  
(3)实际

【即时测评】

解: (1)令  $y=0$ , 得  $-\frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{5}x = 0$ ,

解得  $x_1=0$  (舍去),  $x_2=8$ .

$8+2=10$  (m).

答: 击球点  $O$  与球洞的距离是 10 m.

(2)令  $y=3$ , 得  $-\frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{5}x = 3$ ,

解得  $x_1=3$ ,  $x_2=5$ .

答: 球飞行的水平距离是 3 m 或 5 m.

【课堂小结】

$ax^2+bx+c=0$  两个  $>$  一个  $=$  没有  $<$

【课后评价】

1. C 2. B 3. 4

4. 解:  $\because$  抛物线与  $x$  轴有唯一的公共点  $A(3, 0)$ ,

$$\therefore (a-3)^2 - 4(3b-a) = 0, \text{ 且 } \frac{a-3}{-2} = 3,$$

解得  $a=-3$ ,  $b=2$ .

5. D 6. 8 7. 略 8. C 9. -1 或 2 或 1

10. (1)2

(2)证明: 由题可知  $\Delta = (-m)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (m-1) = m^2 - 2m + 2 = (m-1)^2 + 1$ .

$\because (m-1)^2 \geq 0$ ,  $\therefore (m-1)^2 + 1 > 0$ ,  $\therefore \Delta > 0$ .

$\therefore$  该二次函数的图象与  $x$  轴有两个不同的公共点.

(3)解:  $y = \frac{1}{2}x^2 - mx + m - 1$  的对称轴为直线  $x =$

$$-\frac{-m}{2 \times \frac{1}{2}} = m.$$

$\because$  二次项系数  $\frac{1}{2} > 0$ ,  $\therefore$  二次函数图象开口向上.

$\therefore y_1 < y_2$ ,

$\therefore$  点  $A(m+1, y_1)$  到对称轴的距离小于点  $B(m+p, y_2)$  到对称轴的距离.

$\therefore |m+1-m| < |m+p-m|$ , 即  $|p| > 1$ .

$\therefore p > 1$  或  $p < -1$ .

11. 解: (1) $\because BO=4$  m,

$\therefore$  抛物线  $L_1$  的顶点  $B$  的坐标为  $(0, 4)$ .

设抛物线  $L_1$  的函数解析式为  $y=ax^2+4$ .

$\because AC=16$  m,

结合二次函数的对称性, 得  $A(-8, 0)$ ,  $C(8, 0)$ ,

将  $C(8, 0)$  代入  $y=ax^2+4$ ,

$$\text{得 } 0=64a+4, \text{ 解得 } a=-\frac{1}{16}.$$

$$\therefore L_1: y=-\frac{1}{16}x^2+4.$$

(2)由(1), 得抛物线  $L_1$  的函数解析式为  $y=-\frac{1}{16}x^2+4$ .

$\because MN \parallel AC$ ,  $MP \perp AC$ ,  $NQ \perp AC$ ,  $NQ = \frac{5}{2}$  m, 且

抛物线  $L_3$  的函数解析式为  $y=-\frac{3}{16}(x-4)^2$ ,

$$\therefore y_N - y_Q = -\frac{1}{16}x^2 + 4 - \left[ -\frac{3}{16}(x-4)^2 \right] = \frac{5}{2}.$$

整理, 得

$$\therefore x^2 - 12x + 36 = 0, \text{ 即 } (x-6)^2 = 0, \text{ 解得 } x_1 = x_2 = 6.$$

$$\therefore MN = 2 \times 6 = 12 \text{ (m)}.$$

$\therefore MN$  的长为 12 m.

## 第2课时 二次函数与一元二次方程(2)

【课堂导学】

任务一

例1 解: (1) $y=(x-2)^2-10$  (2)作图略

(3)由图象可知方程有两个根,

一个在 -2 和 -1 之间, 另一个在 5 和 6 之间.

当  $x=-1.1$  时,  $y=-0.39$ , 当  $x=-1.2$  时,  $y=0.24$ ,

$\therefore x=-1.2$  是方程的一个近似根,

同理,  $x=5.2$  是方程的另一个近似根.

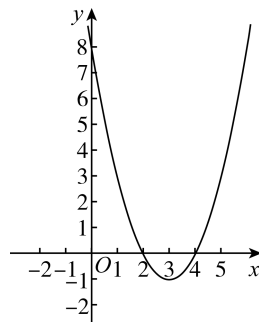
故答案为  $x_1=-1.2$ ,  $x_2=5.2$ .

【即时测评】

略

任务二

例2 解: 函数解析式可化为  $y=(x-3)^2-1$ , 其图象如图所示.



(1)由图象知, 方程  $x^2-6x+8=0$  的解为  $x_1=2$ ,  $x_2=4$ .

(2)当  $x < 2$  或  $x > 4$  时, 函数值大于 0.

(3)当  $2 < x < 4$  时, 函数值小于 0.

【即时测评】

$x \leq -2$  或  $x \geq 1$

【课堂小结】

横 横 上下位置 上下位置

【课后评价】

1. C 2. C 3. -3.3 4. 略 5. A 6. D

7.  $0 < x < 4$

8. 解: 根据图象得二次函数  $y=ax^2+bx+c$  的图象与  $x$  轴的公共点的坐标为  $(-1, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,

$$\therefore \text{其顶点的横坐标为 } \frac{-1+3}{2} = 1.$$

(1)方程  $ax^2+bx+c=-4$  的两个根为  $x_1=x_2=1$ .

(2) $ax^2+bx+c > 0$  的解集为  $x < -1$  或  $x > 3$ .

9. C 10. B 11. ①②④⑤

12. 解: (1)由题意, 将  $C(0, -2)$  代入  $y=x+b$ , 得  $b=-2$ ,

$$\therefore y=x-2.$$

当  $y=0$  时,  $x-2=0$ , 解得  $x=2$ .

$\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(2, 0)$ .

将  $B(2, 0)$  代入  $y=-x^2+mx$ , 得  $-2^2+2m=0$ , 解得  $m=2$ .

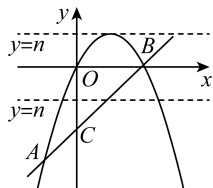
$\therefore$  抛物线的解析式为  $y=-x^2+2x$ .

$$\because y=-x^2+2x=-(x-1)^2+1,$$

$\therefore$  顶点坐标为  $(1, 1)$ .

(2) $\because$  直线  $y=x-2$  与抛物线  $y=-x^2+2x$  的交点在第三象限,

$\therefore -x^2 + 2x = x - 2$ ,  
解得  $x_1 = 2$  (不符合题意, 舍去),  $x_2 = -1$ .  
 $\therefore y = -3$ .  
 $\therefore$  点 A 的坐标为  $(-1, -3)$ .  
观察图象, 得不等式  $-x^2 + mx \leq x + b$  的解集为  $x \leq -1$  或  $x \geq 2$ .  
(3) 由题意, 方程  $-x^2 + mx = n$  在  $-1 \leq x \leq 2$  的范围内只有一个实数根可以理解为抛物线  $y = -x^2 + 2x$  与直线  $y = n$  在  $-1 \leq x \leq 2$  的范围内只有一个交点.  
如图.



当  $-3 \leq n < 0$  时, 直线  $y = n$  与抛物线  $y = -x^2 + 2x$  始终有一个交点.  
当直线  $y = n$  经过抛物线顶点时, 直线  $y = n$  与抛物线  $y = -x^2 + 2x$  有一个交点,  
 $\therefore n$  的取值范围为  $-3 \leq n < 0$  或  $n = 1$ .

## 26.4 实际问题与二次函数

### 第1课时 二次函数的最值与图形问题

#### 【课堂导学】

##### 任务一

探究1 解: 令  $y = -1.2x^2 + 3.6x = 0$ ,

解得  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$ .

$3 - 0 = 3$  (s).

故足球从飞出到落地共用时 3 s.

探究2 解:  $\because y = -1.2x^2 + 3.6x = -1.2(x - 1.5)^2 + 2.7$  ( $0 \leq x \leq 3$ ),

$\therefore$  该函数的顶点坐标为  $(1.5, 2.7)$ .

$\therefore$  足球飞行 1.5 s 时到达最大高度, 飞行的最大高度是 2.7 m.

探究3 解:  $\because$  抛物线  $y = -1.2x^2 + 3.6x$  ( $0 \leq x \leq 3$ ) 的对称轴为  $x = 1.5$ , 且开口向下,

$\therefore$  当  $1.6 \leq x \leq 2.1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小.

$\therefore$  当  $x = 1.6$  时, 足球飞行高度最大, 最大高度为  $y = -1.2 \times 1.6^2 + 3.6 \times 1.6 = 2.688$  (m).

【归纳总结】 (1) ①  $\frac{4ac - b^2}{4a}$  ②  $k$  (2) 顶点 端点

#### 【即时测评】

1. A

2. 解: (1)  $y = x^2 - 4x - 5 = (x - 2)^2 - 9$ , 最小值为  $-9$ , 没有最大值.

(2)  $y = -x^2 - 3x + 4$ , 最大值为  $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{25}{4}$ , 没有最小值.

(3)  $y = x^2 + 3x - 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$  ( $-3 \leq x \leq 1$ ).

$\because -3 < -\frac{3}{2} < 1$ ,  $\therefore$  当  $x = -\frac{3}{2}$  时,  $y_{\text{最小值}} = -\frac{17}{4}$ ;

当  $x = 1$  时,  $y_{\text{最大值}} = 1 + 3 - 2 = 2$ .

##### 任务二

例 解: (1) 设垂直于墙的边长为  $x$  m, 则平行于墙的边长为  $(60 - 2x)$  m.

$\therefore$  矩形菜园的面积  $S = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$ .

根据题意, 得  $0 < 60 - 2x \leq 32$ , 即  $14 \leq x < 30$ .

$\therefore S = -2x^2 + 60x = -2(x^2 - 30x) = -2(x - 15)^2 + 450$ ,

$\therefore$  当  $x = 15$  时,  $S$  取最大值, 此时  $S = 450$ .

$\therefore$  当这个矩形垂直于墙的边长为 15 m、平行于墙的边长为 30 m 时, 菜园的面积最大, 最大面积是 450 m<sup>2</sup>.

(2) 设垂直于墙的边长为  $x$  m, 则平行于墙的边长为  $(60 - 2x)$  m.

由(1)知  $S = -2(x - 15)^2 + 450$ , 根据题意, 得  $0 < 60 - 2x \leq 18$ , 即  $21 \leq x < 30$ .

$\therefore$  当  $21 \leq x < 30$  时,  $S$  随  $x$  的增大而减小,

$\therefore$  当  $x = 21$  时,  $S$  取得最大值,

此时  $S = -2 \times (21 - 15)^2 + 450 = 378$ .

$\therefore$  当这个矩形垂直于墙的边长为 21 m、平行于墙的边长为 18 m 时, 菜园的面积最大, 最大面积是 378 m<sup>2</sup>.

【归纳总结】 (1) 变量 (2) 等量 面积 (3) 取值范围

#### 【即时测评】

1. 2.5

2. 解: (1) 根据题意, 得  $S = x(45 - 3x) = -3x^2 + 45x$ .

$\because 0 < 45 - 3x \leq 20$ ,

$\therefore \frac{25}{3} \leq x < 15$ .

$\therefore S$  关于  $x$  的函数解析式为  $S = -3x^2 + 45x$  ( $\frac{25}{3} \leq x < 15$ ).

(2)  $S = -3x^2 + 45x = -3\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{675}{4}$ .

$\therefore \frac{25}{3} \leq x < 15$ , 对称轴  $x = \frac{15}{2} < \frac{25}{3}$ , 且图象开口向下,

$\therefore$  当  $x = \frac{25}{3}$ , 即 AB 长为  $\frac{25}{3}$  m 时, 花圃面积最大, 最大面积为  $\frac{500}{3}$  m<sup>2</sup>.

#### 【课堂小结】

顶点 顶点 变量 常量 二次函数 自变量

#### 【课后评价】

1. A 2. A 3. 750 4. 略 5. C 6. B 7. 50 8. 略

9. A 10. B 11. 3 12. 略

13. 解: (1) 设  $y_1 = at_1^2 + bt_1$ .

把  $(1, 4.5)$  和  $(2, 14)$  代入函数解析式,

得  $\begin{cases} 4.5 = a + b, \\ 14 = 4a + 2b, \end{cases}$

解得  $\begin{cases} a = 2.5, \\ b = 2. \end{cases}$

$\therefore$  二次函数解析式为  $y_1 = 2.5t_1^2 + 2t_1$ .

(2) 滑雪者在缓冲带 BC 上滑行的时间为

$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{52}{2 \times (-2)} = 13$  (s),

则滑雪者在 AB 段用的时间为  $23 - 13 = 10$  (s).

把  $t = 10$  代入  $y_1 = 2.5t_1^2 + 2t_1$ ,

得  $y_1 = 2.5 \times 10^2 + 2 \times 10 = 270$ .

$\therefore$  滑坡 AB 的长度为 270 m.

### 第2课时 二次函数与商品利润问题

#### 【课堂导学】

##### 任务

例 解: (1) 由题意, 得  $w = (60 - 40 - x)(100 + 10x) = -10x^2 + 100x + 2000$ .

$\therefore$  供货方的原因, 每天销售不得超过 180 件,

$\therefore 100 + 10x \leq 180$ , 解得  $x \leq 8$ .

$\therefore w$  关于  $x$  的函数解析式是  $w = -10x^2 + 100x + 2000$  ( $0 \leq x \leq 8$  且  $x$  为整数).

(2)  $\because w = -10x^2 + 100x + 2000 = -10(x - 5)^2 + 2250$ ,  $0 \leq x \leq 8$  且  $x$  为整数,  $\therefore$  当  $x = 5$  时,  $w$  取得最大值, 最大值为 2 250.

答:该产品每件降价5元时,每天的销售利润最大,最大利润是2 250元.

[归纳总结] (1)总成本 销售量

(2)解析式

(3)自变量 公式

[即时测评]

1. 解: (1) 设  $y=kx+b$  ( $k \neq 0$ ). 根据表格, 得  $\begin{cases} 12k+b=56, \\ 14k+b=52, \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} k=-2, \\ b=80. \end{cases}$$

$\therefore y$  关于  $x$  的函数解析式为  $y=-2x+80$ .

(2) 设日销售利润为  $w$  元,

$$\text{则 } w=(x-10)(-2x+80)=-2x^2+100x-800=-2(x^2-50x+625)-800+1\,250=-2(x-25)^2+450.$$

$\therefore$ 糖果销售单价定为25元时,所获日销售利润最大,最大利润是450元.

2. 解: (1) 由题意, 设一次函数的解析式为  $y=kx+b$ .

$\therefore$ 一次函数图象过点(100, 300), (120, 200),

$$\therefore \begin{cases} 100k+b=300, \\ 120k+b=200, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k=-5, \\ b=800. \end{cases}$$

$\therefore y$  关于  $x$  的函数解析式为  $y=-5x+800$ .

(2) 根据题意, 得  $\begin{cases} x \geq 100, \\ -5x+800 \geq 220, \end{cases}$

$$\text{解得 } 100 \leq x \leq 116.$$

设商场获得的利润为  $w$  元, 则  $w=(x-80)(-5x+800)=-5x^2+1\,200x-64\,000=-5(x-120)^2+8\,000$ .

$\therefore -5 < 0$ ,  $100 \leq x \leq 116$ ,  $\therefore$ 当  $x=116$  时, 利润最大, 最大利润为7 920元.

答: 当销售单价为116元时, 商场获得的利润最大, 最大利润是7 920元.

[交流总结]

1. 文字叙述、表格展示、图象展现

2. 顶点横坐标在自变量的取值范围之内时, 顶点纵坐标便是最值; 顶点横坐标在自变量的取值范围之外时, 端点处的纵坐标才是最值

【课堂小结】

数量 进价 销售量 解析式 自变量 最值

【课后评价】

1. A 2. B 3. 3 4. 略

5. 略 6. 略 7. D 8. D

9. (1) 1 40 (2) 10 4 700

10. 解: (1) 当  $x=6$  时,  $y_1=3$ ,  $y_2=1$ .

$$\therefore y_1-y_2=3-1=2,$$

$\therefore$ 6月出售这种蔬菜每千克的利润是2元.

(2) 设  $y_1=mx+n$ ,  $y_2=a(x-6)^2+1$ .

将(3, 5), (6, 3)代入  $y_1=mx+n$ ,

$$\text{得} \begin{cases} 3m+n=5, \\ 6m+n=3, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} m=-\frac{2}{3}, \\ n=7. \end{cases}$$

$$\therefore y_1=-\frac{2}{3}x+7.$$

将(3, 4)代入  $y_2=a(x-6)^2+1$ ,

$$\text{得 } 4=a(3-6)^2+1, \text{ 解得 } a=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore y_2=\frac{1}{3}(x-6)^2+1=\frac{1}{3}x^2-4x+13.$$

$$\therefore P=y_1-y_2=-\frac{2}{3}x+7-\left(\frac{1}{3}x^2-4x+13\right)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{10}{3}x-6$$

$$=-\frac{1}{3}(x-5)^2+\frac{7}{3}.$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < 0,$$

$\therefore$ 当  $x=5$  时,  $P$  取最大值, 最大值为  $\frac{7}{3}$ .

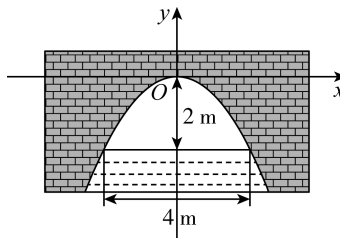
答: 5月出售这种蔬菜每千克的利润最大, 最大利润是  $\frac{7}{3}$  元/千克.

### 第3课时 抛物线形问题

【课堂导学】

任务一

探究1 解: 如图, 以拱顶为原点, 抛物线的对称轴为  $y$  轴, 建立平面直角坐标系.



探究2 解: 由于顶点坐标是(0, 0), 因此这条抛物线对应的二次函数解析式的形式为  $y=ax^2$ .

探究3 解: 已知水面宽4m时, 拱顶离水面2m, 因此点(2, -2)在抛物线上, 由此得出  $-2=a \cdot 2^2$ , 解得  $a=-\frac{1}{2}$ .

探究4 解: 这条抛物线对应的二次函数解析式为  $y=-\frac{1}{2}x^2$ .

当水面下降2.5m时, 水面的纵坐标为-4.5.

$$\text{当 } y=-4.5 \text{ 时, } -4.5=-\frac{1}{2}x^2,$$

$$\text{解得 } x_1=-3, x_2=3.$$

$$\therefore 3-(-3)=6(\text{m}), 6-4=2(\text{m}),$$

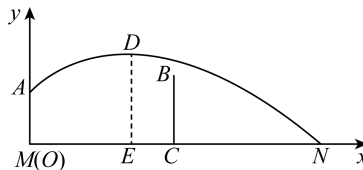
$\therefore$ 水面下降2.5m时, 水面的宽度增加2m.

[即时测评]

A

任务二

例 解: (1) 如图, 以点  $M$  为坐标原点, 建立平面直角坐标系, 则点  $A$ ,  $E$ ,  $D$  的坐标分别为(0, 2), (6, 0), (6, 2.6).



设球运行的高度  $y$  关于运行的水平距离  $x$  的函数解析式为  $y=a(x-h)^2+k$ .

由题意, 知抛物线的顶点为(6, 2.6),

$$\therefore y=a(x-6)^2+2.6.$$

将点  $A(0, 2)$  代入, 得  $2=36a+2.6$ , 解得  $a=-\frac{1}{60}$ .

$$\therefore \text{此时抛物线的函数解析式为 } y=-\frac{1}{60}(x-6)^2+2.6.$$

(2) 该球员的判断不对. 理由如下:

$$\text{当 } x=9 \text{ 时, } y=-\frac{1}{60} \times (9-6)^2+2.6=2.45 > 2.43,$$

$\therefore$ 球能过网.

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } -\frac{1}{60}(x-6)^2+2.6=0,$$

解得  $x_1=6+2\sqrt{39} > 18$ ,  $x_2=6-2\sqrt{39}$  (不符合题意,

舍去).

∴球会出界.

[即时测评]

解:以点A为原点、AD所在的直线为x轴、AB所在的直线为y轴,建立平面直角坐标系,则点B的坐标是(0, 3),点D的坐标是(3, 0),水流运动轨迹抛物线的对称轴是直线 $x=1$ ,从而可设抛物线为 $y=a(x-1)^2+h$ ,将

点B, D坐标代入,得 $\begin{cases} 4a+h=0, \\ a+h=3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-1, \\ h=4. \end{cases}$

∴顶点C的坐标为(1, 4).

∴水流最高点C与地面的距离是4 m.

【课堂小结】

函数解析式 横(纵)坐标 纵坐标 横坐标

【课后评价】

1. A 2.  $8\sqrt{5}$  3. 略 4. C 5.  $\frac{35}{3}$  6. B 7. C 8. 能

9. 解:(1)∵ $8-6=2$ ,

∴抛物线的顶点坐标为(2, 3).

设抛物线为 $y=a(x-2)^2+3$ .

把A(8, 0)代入,得 $36a+3=0$ ,

解得 $a=-\frac{1}{12}$ .

∴抛物线的函数解析式为 $y=-\frac{1}{12}(x-2)^2+3$ .

当 $x=0$ 时, $y=-\frac{1}{12}\times 4+3=\frac{8}{3}>2.44$ ,

∴球不能射进球门.

(2)设小明带球向正后方移动 $m$  m,则移动后的抛物线为

$y=-\frac{1}{12}(x-2-m)^2+3$ .

把(0, 2.25)代入,得 $2.25=-\frac{1}{12}(0-2-m)^2+3$ ,

解得 $m_1=-5$ (舍去), $m_2=1$ .

∴当时他应该带球向正后方移动1 m射门,才能让足球经过点O正上方2.25 m处.

## 第二十七章 反比例函数

### 27.1 反比例函数的概念

【课堂导学】

任务一

(1) $y=\frac{200}{x}$  (2) $y=\frac{0.8}{x}$  (3) $h=\frac{100}{S}$

探究1 解:有两个变量,当一个量变化时,另一个量随着它的变化而变化,两个变量的乘积等于一个常数,每个

式子都可以表示为 $y=\frac{k}{x}$ ( $k$ 为常数, $k\neq 0$ )的形式.对于一个确定的 $x$ 值, $y$ 都有唯一确定的值与其对应.

探究2 解:自变量不能等于0.因为分母不能等于0.

新知生成

$y=\frac{k}{x}$ ( $k$ 为常数, $k\neq 0$ )

[即时测评]

解: $y$ 一定是 $x$ 的反比例函数的有②④⑥.

$k$ 的值分别是3,  $-\frac{1}{11}$ , -1.

任务二

例1 解:∵ $y=(m+1)x^{|2m|-3}$ 是反比例函数,

∴ $|2m|-3=-1$ , ∴ $m=\pm 1$ .

∵ $m+1\neq 0$ , ∴ $m\neq -1$ , ∴ $m=1$ .

[即时测评]

1. C 2. -2

[归纳总结]  $\neq 0$  -1

任务三

例2 解:(1)设 $y=\frac{k}{x-1}$ ( $k\neq 0$ ).

把 $x=-5$ ,  $y=2$ 代入,得 $2=\frac{k}{-5-1}$ ,

∴ $k=(-5-1)\times 2=-12$ .

∴ $y$ 关于 $x$ 的函数解析式为 $y=-\frac{12}{x-1}$ .

(2)把 $x=5$ 代入,得 $y=-\frac{12}{5-1}=-3$ .

[归纳总结]  $y=\frac{k}{x}$ ( $k\neq 0$ ) 方程

[即时测评]

解:(1)设 $y-1=\frac{k}{x+2}$ .

把 $x=-1$ ,  $y=3$ 代入,得 $3-1=\frac{k}{-1+2}$ ,解得 $k=2$ .

∴ $y$ 关于 $x$ 的函数解析式是 $y-1=\frac{2}{x+2}$ ,即 $y=\frac{2}{x+2}+1$ .

(2)把 $x=0$ 代入 $y=\frac{2}{x+2}+1$ ,得 $y=2$ .

【课堂小结】

0  $y=kx^{-1}$   $x\neq 0$   $y\neq 0$

【课后评价】

1. C 2. C 3. C 4. -1 5.  $t=\frac{48}{Q}$  6. 略 7. 略

8. A 9. C 10. 1 11.  $-\frac{3}{2}$  12. 略

13. (1)解:把 $(p, -p)$ 代入 $y=-\frac{4}{x}$ ,得 $p^2=4$ ,

解得 $p_1=2$ ,  $p_2=-2$ .

∴函数 $y=-\frac{4}{x}$ 是倩影函数,影像点为(2, -2),

(-2, 2).

(2)证明:把 $(p, -p)$ 代入 $y=-\frac{k}{x-2}+2x-k$ ( $k\neq$

0),得 $-p=-\frac{k}{p-2}+2p-k$ ,

化简,得 $3p^2+(-6-k)p+k=0$ ,

∴ $\Delta=(-6-k)^2-4\times 3\times k=k^2+36>0$ .

∴该函数总有两个不同的影像点.

### 27.2 反比例函数的图象和性质

#### 第1课时 反比例函数的图象和性质

【课堂导学】

任务一

作图略

探究1 解:画出的每个函数的两条曲线会无限接近坐标轴,但永远不会与坐标轴相交,形状为双曲线.

探究2 解:函数 $y_1=\frac{3}{x}$ 的图象位于第一、第三象限,

$y_2=-\frac{3}{x}$ 的图象位于第二、第四象限.

探究3 解:答案不唯一,合理即可.

[归纳总结] 双曲线 第一、第三 第二、第四

[即时测评]

1. C 2.  $m<-1$

任务二

数学活动1

图象略

探究1 解:两个函数的图象均在第一、第三象限,在每

一个象限内,  $y$  随  $x$  的增大而减小.

**探究 2 解:** 图略. 当  $k > 0$  时, 函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象在第一、第三象限, 在每一个象限内,  $y$  随  $x$  的增大而减小.

### 数学活动 2

图略

**探究 1 解:** 当  $k < 0$  时, 函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象在第二、第四象限, 在每一个象限内,  $y$  随  $x$  的增大而增大.

**探究 2 解:** 是轴对称图形.

[归纳总结] 一 三 减小 二 四 增大

[即时测评]

1. D 2. 1(答案不唯一)

### 【课堂小结】

双曲线 图象在第一、第三象限 图象在第二、第四象限 在每一个象限内,  $y$  随  $x$  的增大而减小 在每一个象限内,  $y$  随  $x$  的增大而增大

### 【课后评价】

1. 略 2. C 3. D 4.  $k > -\frac{1}{2}$  5.  $<$  6. 略

7. C 8. A 9.  $k_1 < k_2 < k_3$

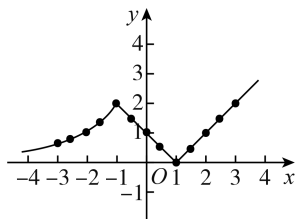
10. 解: (1) 由题意, 得  $\begin{cases} m^2 - m - 7 = -1, \\ m - 2 > 0, \end{cases}$

解得  $m = 3$ .

(2) 由题意, 得  $\begin{cases} m^2 - m - 7 = -1, \\ m - 2 < 0, \end{cases}$  解得  $m = -2$ .

11. 解: (1)  $\frac{2}{3}$  2

(2) 如图.



(3) ①  $<$   $<$

② 当  $y = 1$  时, 若  $x > -1$ , 则  $1 = |x - 1|$ ,  
 $\therefore x = 0$  或  $x = 2$ .

当  $y = 1$  时, 若  $x \leq -1$ , 则  $1 = -\frac{2}{x}$ ,

$\therefore x = -2$ .

综上,  $x = 0$  或  $x = 2$  或  $x = -2$ .

## 第 2 课时 反比例函数的图象和性质的应用

### 【课堂导学】

#### 任务一

**探究 1 解:** 将  $A(m, 2)$  代入  $y_1 = x + 1$ , 得  $2 = m + 1$ ,  
 解得  $m = 1$ .

$\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(1, 2)$ .

将  $A(1, 2)$  代入  $y_2 = \frac{k}{x}$  中, 得  $2 = \frac{k}{1}$ , 解得  $k = 2$ .

$\therefore$  反比例函数的解析式为  $y_2 = \frac{2}{x}$ .

**探究 2 解:** 分别把点  $B, C$  的坐标代入  $y_2 = \frac{2}{x}$ , 得  
 $3 \neq \frac{2}{-1}$ ,  $1 = \frac{2}{2}$ ,

$\therefore$  点  $B$  不在该反比例函数的图象上, 点  $C$  在该反比例函数的图象上.

**探究 3 解:** 联立  $\begin{cases} y = x + 1, \\ y = \frac{2}{x}, \end{cases}$

解得  $\begin{cases} x = -2, \\ y = -1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$

$\therefore$  点  $D$  的坐标为  $(-2, -1)$ .

由题中函数图象可知,

当  $y_1 < y_2$  时,  $x < -2$  或  $0 < x < 1$ .

[归纳总结] 一个 解析式

[即时测评]

解: (1) 把  $A(-2, 1)$  代入  $y = \frac{m}{x}$ , 得  $m = -2$ ,

$\therefore$  反比例函数的解析式为  $y = -\frac{2}{x}$ .

把  $B(1, n)$  代入  $y = -\frac{2}{x}$ , 解得  $n = -2$ .

$\therefore B(1, -2)$ .

把  $A(-2, 1), B(1, -2)$  代入  $y = kx + b$ , 得  $\begin{cases} 1 = -2k + b, \\ -2 = k + b, \end{cases}$

解得  $\begin{cases} k = -1, \\ b = -1. \end{cases}$

$\therefore$  一次函数的解析式为  $y = -x - 1$ .

(2) 由题图可知, 当  $y_1 > y_2$  时,  $x < -2$  或  $0 < x < 1$ .

### 任务二

**探究 1 解:** 图象的另一支在第四象限.

$\therefore$  反比例函数的图象在第二、第四象限,

$\therefore n + 3 < 0$ , 解得  $n < -3$ .

**探究 2 解:** 设点  $P$  的坐标为  $(x, y)$ . 由题意, 得  $S_{\text{四边形}PQOR} = |x| \cdot |y| = 3$ .

$\therefore$  图象在第二、第四象限,  $\therefore xy = -3$ .

$\therefore n + 3 = -3$ , 解得  $n = -6$ .

[即时测评]

解: 根据题意, 得  $S_{\text{四边形}PCOD} = PC \cdot PD = 6$ ,

$S_{\triangle OBD} = S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ ,

$\therefore S_{\text{四边形}PAOB} = S_{\text{四边形}PCOD} - S_{\triangle OBD} - S_{\triangle OAC} = 6 - 1 - 1 = 4$ .

### 【课堂小结】

方程组 一个  $|k|$

### 【课后评价】

1. D 2. A 3. 略 4. D 5. D 6. 4 7. C 8. C 9. -4

10. 解: (1) 一次函数的图象与反比例函数  $y_2 = \frac{m}{x}$  的图象

相交于点  $A$  和点  $B(-2, -\frac{3}{2})$ , 点  $A$  的横坐标为 1,

$\therefore$  将  $B(-2, -\frac{3}{2})$  代入  $y_2 = \frac{m}{x}$ ,

得  $m = -2 \times (-\frac{3}{2}) = 3$ .  $\therefore y_2 = \frac{3}{x}$ .

将  $x_A = 1$  代入  $y_2 = \frac{3}{x}$ , 得  $y_A = \frac{3}{1} = 3$ ,

$\therefore A(1, 3)$ .

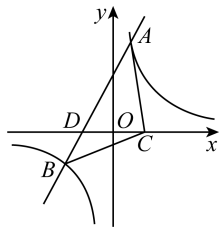
把  $A(1, 3), B(-2, -\frac{3}{2})$  代入  $y_1 = kx + b$ , 得

$\begin{cases} k + b = 3, \\ -2k + b = -\frac{3}{2}, \end{cases}$

解得  $\begin{cases} k = \frac{3}{2}, \\ b = \frac{3}{2}. \end{cases}$

$\therefore$  一次函数的解析式为  $y_1 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ .

- (2)  $\because x_A = 1, x_B = -2$ ,  
 $\therefore$  当  $y_1 \leq y_2$  时,  $x$  的取值范围是  $x \leq -2$  或  $0 < x \leq 1$ .  
 (3) 设  $y_1 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$  与  $x$  轴交于点  $D$ , 如图.



当  $y=0$  时,  $\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ ,  
 $\therefore x = -1, \therefore D(-1, 0)$ .  
 设  $C(t, 0), \therefore CD = |t+1|$ .  
 $\therefore \triangle ABC$  的面积为 9,  
 $\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CDA} + S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2}CD \cdot (y_A - y_B)$ .  
 $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}CD \cdot \left(3 + \frac{3}{2}\right) = 9$ .  
 $\therefore CD = 4$ , 即  $|t+1| = 4$ ,  
 解得  $t = 3$  或  $t = -5$ .  
 $\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(-5, 0)$  或  $(3, 0)$ .

## 27.3 实际问题与反比例函数

### 第1课时 实际问题与反比例函数(1)

#### 【课堂导学】

##### 任务一

探究1 解: 根据题意, 得本次采购的总预算为  $5 \times 32 = 160$ (元).  
 $y$  与  $x$  满足反比例函数关系,  $y$  关于  $x$  的函数解析式为  $y = \frac{160}{x}$ .

探究2 解: 根据题意, 得  $16 = \frac{160}{a}$ ,

解得  $a = 10$ .

经检验,  $a = 10$  是所列方程的解, 且符合题意.

$\therefore a$  的值为 10.

探究3 解: 在反比例函数  $y = \frac{160}{x}$  中,  $k = 160 > 0$ ,

$\therefore$  当  $x > 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小.

又  $\because x \geq 6$ , 且  $y$  为正整数,

$\therefore$  当  $x = 6$  时,  $y$  取得最大值, 最大值为  $\frac{160}{6} = \frac{80}{3} \approx 26.7$ .

$\therefore$  最多能采购 26 副护腕.

#### 【即时测评】

解: (1)  $\because s = 80 \times 6 = 480$ ,

$\therefore$  函数解析式为  $v = \frac{480}{t}$ .

(2) 在函数  $v = \frac{480}{t}$  中,  $k = 480 > 0$ ,

$\therefore$  当  $t > 0$  时,  $v$  随  $t$  的增大而减小,

当  $v = 120$  时,  $t = 4$ ;

当  $v = 60$  时,  $t = 8, \therefore 4 \leq t \leq 8$ .

##### 任务二

例 解: (1)  $\because$  电磁波的波长  $\lambda$  与频率  $f$  的乘积为定值,  
 $\therefore$  波长  $\lambda$  与频率  $f$  是反比例函数关系.

设  $\lambda = \frac{k}{f} (k \neq 0)$ .

把  $f = 10, \lambda = 30$  代入, 得  $30 = \frac{k}{10}$ , 解得  $k = 300$ .

$\therefore \lambda = \frac{300}{f}$ .

(2) 当  $f = 50$  时,  $\lambda = \frac{300}{50} = 6$ .

$\therefore$  当  $f = 50$  时, 此电磁波的波长  $\lambda$  为 6 m.

#### 【即时测评】

解: 由题意, 设  $y = \frac{k}{x}$ .

把  $x = 6, y = 2$  代入, 得  $k = 6 \times 2 = 12$ .

$\therefore y$  关于  $x$  的函数解析式为  $y = \frac{12}{x}$ .

把  $y = 3$  代入  $y = \frac{12}{x}$ , 得  $x = 4$ ,

$\therefore$  小孔到蜡烛的距离为 4 cm.

#### 【归纳总结】

(1)  $\rho = \frac{m}{V}$  (2)  $p = \frac{F}{S}$  (3)  $F = \frac{W}{s}$  (4)  $I = \frac{U}{R}$

(5)  $P = \frac{U^2}{R}$

#### 【课堂小结】

(1) 变量 (2) 解析 (3) 解析 变量 (4) 答案

#### 【课后评价】

1.  $\frac{24}{S}$  2. 略 3. B 4. 0.11 5. 略

6. D 7. 10 8.  $\frac{15}{8}$  9. 略

10. 解: (1) 设  $R_1$  关于  $m$  的函数解析式为  $R_1 = km + b (k \neq 0)$ .

把  $(0, 240), (5, 230)$  代入,

得  $\begin{cases} 240 = b, \\ 230 = 5k + b, \end{cases}$

解得  $\begin{cases} k = -2, \\ b = 240. \end{cases}$

$\therefore R_1$  关于  $m$  的函数解析式为  $R_1 = -2m + 240$ .

(2) 由题意, 得可变电阻两端的电压 = 电源电压 - 电表电压, 即可变电阻两端的电压  $= 10 - U_0$ .

$\because$  串联电路中电流处处相等, 电流  $I = \frac{U}{R}$ .

$\therefore \frac{10 - U_0}{R_1} = \frac{U_0}{R_0}$ .

化简, 得  $R_1 = R_0 \left( \frac{10}{U_0} - 1 \right)$ .

$\because R_0 = 6, \therefore R_1 = \frac{60}{U_0} - 6$ .

将  $R_1 = -2m + 240$  代入, 得  $m = -\frac{30}{U_0} + 123$ .

(3)  $\because m = -\frac{30}{U_0} + 123$ ,

$\therefore m$  随  $U_0$  的增大而增大.

$\therefore$  当  $U_0 = 6$  时,  $m_{\text{最大值}} = -\frac{30}{6} + 123 = 118$ .

$\therefore$  该电子体重秤可称的最大质量是 118 kg.

### 第2课时 实际问题与反比例函数(2)

#### 【课堂导学】

##### 任务一

例1 解: (1) 设  $y$  关于  $x$  的函数解析式为  $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ .

将  $(20, 50)$  代入上式, 得  $50 = \frac{k}{20}$ ,

解得  $k = 1\ 000$ .

∴  $y$  关于  $x$  的函数解析式为  $y = \frac{1\,000}{x} (x > 0)$ .

(2) 将  $x = 25$  代入  $y = \frac{1\,000}{x}$ , 得  $y = \frac{1\,000}{25} = 40$ .

∴ 该工程队完成工程所需的时间为 40 天.

(3)  $x > 20$

[即时测评]

解: (1) 设  $y = \frac{k}{x}$ . 把  $(80, 50)$  代入  $y = \frac{k}{x}$ ,

得  $50 = \frac{k}{80}$ , 解得  $k = 4\,000$ .

∴  $y$  关于  $x$  的函数解析式为  $y = \frac{4\,000}{x} (x > 0)$ .

(2) 当  $y = 40$  时,  $x = \frac{4\,000}{40} = 100$ .

∵  $k > 0$ , 在第一象限内,  $y$  随  $x$  的增大而减小,

∴ 李海每分钟至少录入 100 个字.

任务二

探究 1 解: 设这个函数的解析式为  $p = \frac{k}{V}$ .

把  $(1.6, 60)$  代入, 得  $k = 96$ .

∴ 该函数的解析式为  $p = \frac{96}{V} (V > 0)$ .

探究 2 解: 当  $V = 0.8 \text{ m}^3$  时,  $p = \frac{96}{0.8} = 120 (\text{kPa})$ .

∴ 气球内的气压是 120 kPa.

探究 3 解: 根据题意, 得  $p \leq 144 \text{ kPa}$  为安全范围,

∴  $\frac{96}{V} \leq 144$ , 解得  $V \geq \frac{2}{3}$ .

故为了安全起见, 气球的体积应不小于  $\frac{2}{3} \text{ m}^3$ .

[即时测评]

解: (1) 设  $I = \frac{U}{R}$ , 由图象可知, 当  $R = 1\,100 \, \Omega$  时,  $I = 0.2 \text{ A}$ ,

∴  $U = 0.2 \times 1\,100 = 220$ . ∴  $I = \frac{220}{R} (R > 0)$ .

(2) 当  $R = 1\,375 \, \Omega$  时,  $I = \frac{220}{1\,375} = 0.16 (\text{A})$ .

(3) 当  $I = 0.1 \text{ A}$  时,  $R = \frac{220}{0.1} = 2\,200 (\Omega)$ ,

当  $I = 0.25 \text{ A}$  时,  $R = \frac{220}{0.25} = 880 (\Omega)$ .

∴ 该台灯的电阻  $R$  的取值范围为  $880 \, \Omega \leq R \leq 2\,200 \, \Omega$ .

【课堂小结】

系数 代入 数形

【课后评价】

1. C 2. D 3. 略 4. A 5. 100 N 6. 略 7. D

8. 110 m

9. 解: (1) 由“杠杆原理”, 得  $Fl = 1\,200 \times 0.5$ , 即  $Fl = 600$ ,

∴  $F = \frac{600}{l} (l > 0)$ .

当  $l = 1.5 \text{ m}$  时,  $F = \frac{600}{1.5} = 400 (\text{N})$ .

∴ 撬动石头至少需要 400 N 的力.

(2) 由(1)可知,  $F = \frac{600}{l} (l > 0)$ .

当  $F = \frac{1}{2} \times 400 = 200 (\text{N})$  时,  $l = \frac{600}{200} = 3 (\text{m})$ .

∴ 当  $l > 0$  时,  $F$  随  $l$  的增大而减小, 且  $3 - 1.5 = 1.5 (\text{m})$ ,

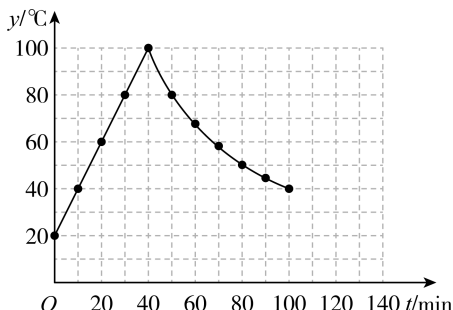
∴ 动力臂  $l$  至少要加长 1.5 m.

### 第 3 课时 实际问题与反比例函数(3)

【课堂导学】

任务

例 解: (1) 描点、连线如图所示.



(2) 观察图象可知第一次加热过程的函数关系是一次函数,

设解析式为  $y = kt + b$ , 则有  $\begin{cases} b = 20, \\ 10k + b = 40, \end{cases}$

解得  $\begin{cases} k = 2, \\ b = 20. \end{cases}$

∴ 第一次加热过程的函数解析式是  $y = 2t + 20 (0 \leq t \leq 40)$ .

由图象可知第一次降温过程的函数关系是反比例函数,

设  $y = \frac{m}{t}$ .

把  $(50, 80)$  代入, 得  $m = 4\,000$ ,

∴ 第一次降温过程的函数解析式是  $y = \frac{4\,000}{t} (40 \leq t \leq 100)$ .

(3) 由题意可知, 第二次加热时间为 30 min, 结束加热是第 130 min, 而 18:00 至 20:10 共 130 min,

∴ 饮水机加热一次, 降温一次, 又加热了一次.

把  $y = 80$  代入  $y = 2t + 20$ , 得  $t = 30$ . 把  $y = 90$  代入  $y = 2t + 20$ , 得  $t = 35$ .

∴ 一次加热过程出现的最佳水温时间为  $35 - 30 = 5 (\text{min})$ .

把  $y = 80$  代入  $y = \frac{4\,000}{t}$ , 得  $t = 50$ . 把  $y = 90$  代入  $y =$

$\frac{4\,000}{t}$ , 得  $t = \frac{400}{9}$ ,

∴ 一次降温出现的最佳水温时间为  $50 - \frac{400}{9} = \frac{50}{9} (\text{min})$ .

∴ 18:00 开启饮水机(初始水温  $20^\circ\text{C}$ )到当晚 20:10, 沏茶

的最佳水温时间共  $\frac{50}{9} + 5 \times 2 = \frac{140}{9} (\text{min})$ .

[即时测评]

解: (1) 第 5 次实验数据明显是错误的. 理由如下:

根据物理公式  $F = pS$ , 压力  $F$  固定,

∴ 每次所得实验数据中  $p$  与  $S$  的乘积应为定值, 分别计算 5 次实验中  $p$  与  $S$  的乘积的值, 可得第 5 次实验数据的值, 与前 4 次的固定值不符,

∴ 第 5 次实验数据明显是错误的.

(2) 反比例函数

由(1)可知, 固定压力  $F = 60 \text{ N}$ , 根据公式  $F = pS$ , 变形可得  $p = \frac{F}{S}$ , ∴  $p$  关于  $S$  的函数解析式为  $p = \frac{60}{S} (S > 0)$ .

(3) 当  $S = 0.25 \text{ m}^2$  时,  $p = \frac{60}{0.25} = 240 (\text{Pa})$ .

∴ 此时接触面受到的压强为 240 Pa.

[归纳总结] (1) 散点 (2) 解析 (3) 数据

(4) 解析

【课堂小结】

图象 模型 模型 问题

$$kx+b(k \neq 0) \quad ax^2+bx+c(a \neq 0) \quad y=\frac{k}{x} (k \neq 0)$$

### 【课后评价】

1. A 2. B 3.  $y=\frac{10\,000}{x}$

4. 解: (1)由表中的数据可知,  $Pt=180$ ,

$$\therefore t=\frac{180}{P}.$$

(2)在  $t=\frac{180}{P}$  中, 当  $t=10$  时,  $P=18$ .

$$\because 180 > 0,$$

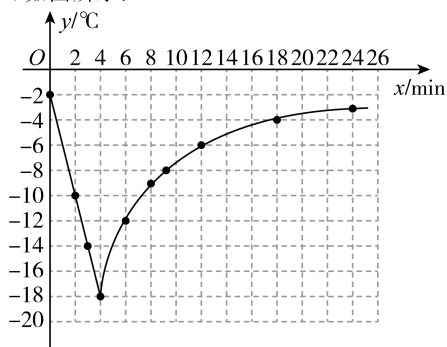
$\therefore t$  随  $P$  的增大而减小.

$\therefore$  当  $t \leq 10$  时,  $P \geq 18$ .

$\therefore$  若要求净化时间不超过 10 h, 则净化设备的功率至少需要 18 kW.

5. D 6.  $F=\frac{24}{x} (x > 0)$  7. 略

8. 解: (1)如图所示.



(2)当  $0 \leq x \leq 4$  时, 设  $y$  关于  $x$  的函数解析式为  $y=kx+b(k \neq 0)$ .

$$\text{由题意, 得 } \begin{cases} b=-2, \\ 2k+b=-10, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k=-4, \\ b=-2. \end{cases}$$

$\therefore$  当  $0 \leq x \leq 4$  时,  $y$  关于  $x$  的函数解析式为  $y=-4x-2$ .

当  $x > 4$  时, 设  $y$  关于  $x$  的函数解析式为  $y=\frac{m}{x}$ .

$$\text{由题意, 得 } -12=\frac{m}{6}, \text{ 解得 } m=-72.$$

此时,  $y$  关于  $x$  的函数解析式为  $y=-\frac{72}{x}$ .

$$\text{当 } y=-2 \text{ 时, } -2=-\frac{72}{x}, \text{ 解得 } x=36.$$

$\therefore$  冰箱的一个运行周期时长为 36 min.

$$\therefore y=\begin{cases} -4x-2 & (0 \leq x \leq 4), \\ -\frac{72}{x} & (4 < x \leq 36). \end{cases}$$

(3)当冰箱温度刚好达到  $-18^\circ\text{C}$  时, 已运行了 4 min, 继续运行 120 min, 总共为 124 min, 124 min 冰箱运行 3 个周期零 16 min.

$$\text{当 } x=16 \text{ 时, } y=-\frac{72}{16}=-4.5,$$

$\therefore$  继续运行 120 min, 此时冰箱内的温度是  $-4.5^\circ\text{C}$ .

### 综合素养评价(一)

1. A 2. D 3. C 4. A 5. D 6. C 7. A 8. B

9. A 10. C

11.  $y=2(x+1)^2-2$  12.  $301(1+x)^2=500$

13.  $x_1=-2, x_2=5$  14. 2 025 15. 0.22 16.  $\frac{25}{2}$

17. 解: (1) $3x(2x+1)=4x+2$ ,

$$\text{移项, 得 } 3x(2x+1)-4x-2=0,$$

$$\text{即 } 3x(2x+1)-2(2x+1)=0.$$

左边分解因式, 得  $(2x+1)(3x-2)=0$ .

$$\therefore 2x+1=0 \text{ 或 } 3x-2=0,$$

$$\text{解得 } x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{2}{3}.$$

$$(2)x^2-x-\frac{7}{4}=0.$$

$$\therefore a=1, b=-1, c=-\frac{7}{4},$$

$$\therefore \Delta=b^2-4ac=1+7=8>0.$$

方程有两个不相等的实数根.

$$\therefore x=\frac{1 \pm \sqrt{8}}{2 \times 1}=\frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore x_1=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}, x_2=\frac{1-2\sqrt{2}}{2}.$$

18. 解: (1) $\triangle ABC$  为等腰三角形. 理由如下:

把  $x=1$  代入方程, 得  $a+c-2b+a-c=0$ , 则  $a=b$ , 所以  $\triangle ABC$  为等腰三角形.

(2) $\triangle ABC$  为直角三角形. 理由如下:

根据题意, 得  $\Delta=(-2b)^2-4(a+c)(a-c)=0$ , 即  $b^2+c^2=a^2$ ,  $\therefore \triangle ABC$  为直角三角形.

(3) $\because \triangle ABC$  为等边三角形,  $\therefore a=b=c$ .

$\therefore$  方程化为  $x^2-x=0$ , 解得  $x_1=0, x_2=1$ .

19. 解: (1)由题意, 得  $\angle A=90^\circ, AB \parallel CD$ ,

$\therefore$  当  $AP=DQ$  时, 四边形  $APQD$  是矩形,

$$\text{即 } 3t=16-2t, \text{ 解得 } t=\frac{16}{5}.$$

$\therefore$  当  $t=\frac{16}{5}$  时, 四边形  $APQD$  是矩形.

(2)①如图, 当点  $P$  在点  $Q$  上方时, 过点  $P$  作  $PM \perp CD$  于点  $M$ .

由题意, 得  $MQ=16-2t-3t=(16-5t)\text{cm}$ ,  $PM=8\text{cm}$ ,  $PQ=10\text{cm}$ .

在  $\text{Rt}\triangle PQM$  中, 由勾股定理, 得  $QM^2+PM^2=PQ^2$ ,

$$\text{即 } (16-5t)^2+8^2=10^2,$$

$$\text{解得 } t_1=2, t_2=\frac{22}{5} (\text{不符合题意, 舍去}).$$

②如图, 当点  $P$  在点  $Q$  下方时, 过点  $P$  作  $PN \perp CD$  于点  $N$ .

由题意, 得  $NQ=2t-(16-3t)=(5t-16)\text{cm}$ ,  $PN=8\text{cm}$ ,  $PQ=10\text{cm}$ .

在  $\text{Rt}\triangle PQN$  中, 由勾股定理, 得  $QN^2+PN^2=PQ^2$ ,

$$\text{即 } (5t-16)^2+8^2=10^2,$$

$$\text{解得 } t_1=\frac{22}{5}, t_2=2 (\text{不符合题意, 舍去}).$$

$$\text{由 } \frac{16}{3} > \frac{22}{5}, \text{ 得 } t=\frac{22}{5} \text{ 符合题意.}$$

$$\text{综上, } t=2 \text{ 或 } t=\frac{22}{5}.$$

20. 解: (1) $\because$  关于  $x$  的一元二次方程  $x^2-6x+4m+1=0$  有实数根,

$$\therefore \Delta=(-6)^2-4 \times 1 \times (4m+1) \geq 0,$$

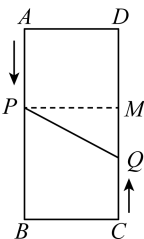
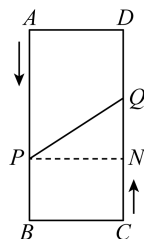
解得  $m \leq 2$ .

(2) $\because$  方程  $x^2-6x+4m+1=0$  的两个实数根分别为  $x_1, x_2$ ,

$$\therefore x_1+x_2=6, x_1x_2=4m+1.$$

$$\therefore |x_1-x_2|=4,$$

$$\therefore (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4^2=16,$$



即  $32-16m=16$ , 解得  $m=1$ .

21. 解: (1) 由题意, 得抛物线  $y=x^2+mx+1$  经过点  $M(3, -2)$ ,

$$\therefore 9+3m+1=-2, \text{ 解得 } m=-4.$$

$$\therefore y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3.$$

$\therefore$  此抛物线最低点  $P$  的坐标为  $(2, -3)$ .

(2)  $\because x-1 < x+2 < x+3$ , 点  $A(x-1, y_1)$ ,  $B(x+3, y_2)$ ,  $C(x+2, y_3)$  在抛物线上且位于对称轴的左侧, 抛物线为  $y=x^2-4x+1$ ,

$$\therefore y_1 > y_3 > y_2.$$

$\therefore$  小球经过三点的先后顺序依次为  $A, C, B$ .

22. 解: (1)  $\because 30 \times 300 = 40 \times 225 = 45 \times 200 = 50 \times 180 = 60 \times 150 = 9\,000$ ,

$\therefore y$  是  $x$  的反比例函数.

$$\text{设 } y = \frac{k}{x} (k \neq 0),$$

$$\text{把 } x=30, y=300 \text{ 代入, 得 } 300 = \frac{k}{30},$$

解得  $k=9\,000$ .

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式为 } y = \frac{9\,000}{x}.$$

$$(2) \textcircled{1} \left(8 + \frac{x}{25}\right) (400-x)$$

$\textcircled{2}$  该商场平均每天的盈利不可能是  $4\,000$  元. 理由如下:

$$\text{根据题意, 得 } (400-x) \left(8 + \frac{x}{25}\right) = 4\,000,$$

$$\text{整理, 得 } \frac{1}{25}x^2 - 8x + 800 = 0.$$

$$\because \Delta = (-8)^2 - 4 \times \frac{1}{25} \times 800 = -64 < 0,$$

$\therefore$  该方程无实数根.

$\therefore$  该商场不可能每天盈利  $4\,000$  元.

23. 解: (1) 观察上述各点的分布规律,  $y$  关于  $x$  的函数是二次函数.

设该二次函数的解析式为  $y=ax^2+bx+c$ .

$$\text{将 } (0, 35), (1, 56), (2, 63) \text{ 代入, 得 } \begin{cases} c=35, \\ a+b+c=56, \\ 4a+2b+c=63, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=-7, \\ b=28, \\ c=35. \end{cases}$$

$\therefore$  该二次函数的解析式为  $y=-7x^2+28x+35$ .

(2) 当  $x=0$  时,  $y=35$ ,

$\therefore$  种子自然发芽率为  $35\%$ .

$\therefore$  当  $y=35$  时,  $-7x^2+28x+35=35$ ,

$$\text{解得 } x_1=0, x_2=4;$$

当  $y=0$  时,  $-7x^2+28x+35=0$ ,

$$\text{解得 } x_1=-1 (\text{不符合题意, 舍去}), x_2=5.$$

$\therefore$  抑制种子发芽时的生长素浓度范围为  $4 < x \leq 5$ .

24. 解: (1) 根据题意, 得  $y=200-10(x-8)=-10x+280$ .

$\therefore y$  关于  $x$  的函数解析式为  $y=-10x+280$ .

(2) 根据题意, 得  $(x-6)(-10x+280)=720$ ,

$$\text{解得 } x_1=10, x_2=24 (\text{不符合题意, 舍去}).$$

$\therefore$  要使日销售利润为  $720$  元, 销售单价应定为  $10$  元.

(3) 根据题意, 得  $w=(x-6)(-10x+280)=-10(x-17)^2+1\,210$ .

$$\because -10 < 0,$$

$\therefore$  当  $x < 17$  时,  $w$  随  $x$  的增大而增大.

$\therefore$  当  $x=12$  时, 日销售利润最大,  $w_{\text{最大值}}=960$ .

$\therefore w$  关于  $x$  的函数解析式为  $w=-10(x-17)^2+1\,210$ ;

当  $x$  为  $12$  时, 日销售利润最大, 最大利润为  $960$  元.

25. 解: (1)  $\because$  点  $A(-2, 6)$  在双曲线  $y=\frac{m}{x}$  上,

$$\therefore m=-2 \times 6 = -12.$$

又  $\because$  点  $B(-6, a)$  在双曲线  $y=\frac{m}{x}$  上,

$$\therefore -6a = -12, \text{ 解得 } a=2.$$

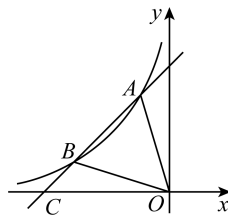
$\because$  点  $A(-2, 6)$ ,  $B(-6, 2)$  在直线  $y=kx+b$  上,

$$\therefore \begin{cases} -2k+b=6, \\ -6k+b=2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k=1, \\ b=8. \end{cases}$$

$$\therefore y=x+8.$$

(2) 不等式  $kx+b > \frac{m}{x}$  的解集为  $-6 < x < -2$ .

(3) 设直线  $AB$  与  $x$  轴交于点  $C$ ,



当  $y=0$  时,  $x+8=0$ ,

$$\therefore x=-8.$$

$\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(-8, 0)$ .

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times |-8| \times 6 - \frac{1}{2} \times |-8| \times 2$$

$$= 24 - 8$$

$$= 16.$$

$\therefore \triangle AOB$  的面积为  $16$ .

26. 解: 设经过  $x$  s,  $P, Q$  之间的距离等于  $4\sqrt{2}$  cm.

由题意, 得  $x < \frac{3}{2}$ , 且  $AP=x$  cm,  $BQ=2x$  cm,

$$\therefore BP=AB-AP=(6-x)\text{ cm}.$$

$$\because BP^2+BQ^2=PQ^2,$$

$$\therefore (6-x)^2+(2x)^2=(4\sqrt{2})^2,$$

$$\text{解得 } x_1=\frac{2}{5}, x_2=2 (\text{不符合题意, 舍去}).$$

$$\therefore \text{需要经过 } \frac{2}{5} \text{ s}.$$

27. 解: (1)  $\because OA=1, OB=4OA$ ,

$$\therefore OB=4.$$

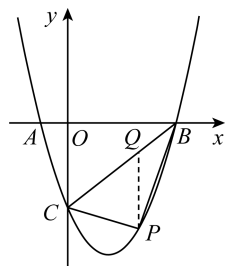
$$\therefore A(-1, 0), B(4, 0).$$

将  $A(-1, 0), B(4, 0)$  代入抛物线解析式, 得

$$\begin{cases} a-b-4=0, \\ 16a+4b-4=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=1, \\ b=-3. \end{cases}$$

$\therefore$  抛物线的函数解析式为  $y=x^2-3x-4$ .

(2) 如图, 过点  $P$  作  $y$  轴的平行线, 交  $BC$  于点  $Q$ .



由(1)知, 抛物线的解析式为  $y=x^2-3x-4$ ,

令  $x=0$ , 则  $y=-4$ ,  $\therefore C(0, -4)$ .

$$\therefore OB=OC=4. \therefore S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8.$$

设直线  $BC$  的解析式为  $y=mx+n$ ,

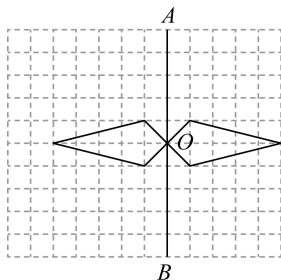
$\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(2, -6)$ .

(3) 5  $60^\circ$

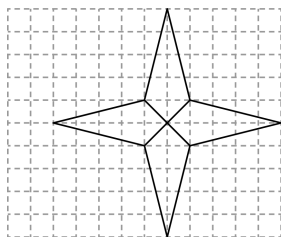
[归纳总结] 旋转中心 旋转角

[即时测评]

解: (1) 如图所示.



(2) 如图所示.

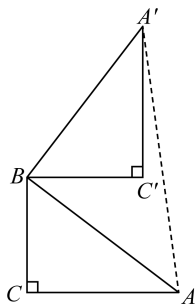


(3) 略

【课后评价】

1. C 2. A 3. C 4.  $45^\circ$  5. 略 6. 略 7. 略

8. 解: (1) 如图,  $\triangle A'BC'$  即为所求.



(2)  $\because \angle C = 90^\circ, BC = 3, AC = 4,$

$\therefore AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$

$\because \triangle ABC$  绕点 B 逆时针旋转  $90^\circ$  得到  $\triangle A'BC'$ ,

$\therefore BA' = BA = 5, \angle A'BA = 90^\circ.$

$\therefore AA' = \sqrt{BA'^2 + BA^2} = 5\sqrt{2}.$

9. 略 10. 略

## 28.2 中心对称

### 第 1 课时 中心对称及其性质

【课堂导学】

任务一

探究 1 解: 把一个平面图形绕着平面内某一点转动一个角度, 叫作图形的旋转.

旋转的性质: 一个图形和其旋转得到的图形中, 对应点到旋转中心的距离相等; 对应点与旋转中心所连线段所成的角相等, 都等于旋转角; 旋转前后的图形全等.

探究 2 解: 它们都属于旋转; 它们的旋转角都为  $180^\circ$ , 旋转前后的图形重合.

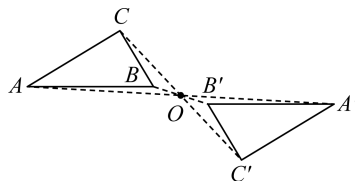
新知生成  $180^\circ$  重合 对称 对称中心 对称点

[即时测评]

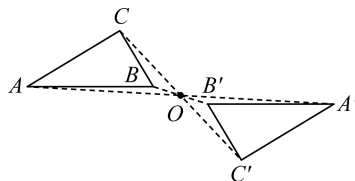
1. D 2. (1) A (2) 中心对称 (3) D E

任务二

探究 1 解: 如图,  $\triangle A'B'C'$  即为所求.



探究 2 解: (1) 如图.



点 O 在线段  $AA', BB', CC'$  上, 是它们的公共中点.

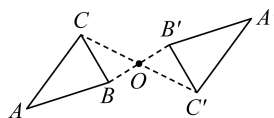
(2)  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$

新知生成 (1) 旋转 全等 (2) 对称中心 对称中心

[即时测评]

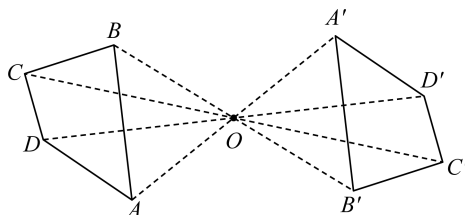
1. C

2. 解: 如图, 连接  $BB', CC'$ , 交点即为对称中心 O.



任务三

例 解: 如图.



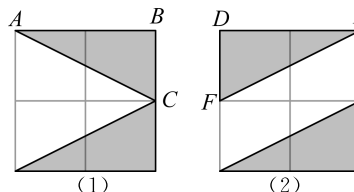
(1) 连接 AO 并延长至点 A', 使  $A'O = AO$ ; 连接 BO 并延长至点 B', 使  $B'O = BO$ ; 分别连接 CO, DO 并延长, 同理得到点 C', D'.

(2) 依次连接点 A', B', C', D', 则四边形 A'B'C'D' 即为所求.

[归纳总结] (1) 中心 (2) 对称点 (3) 对称点

[即时测评]

解: (1) 如图(1),  $\triangle ABC$  即为所求.(答案不唯一)



(2) 如图(2),  $\triangle DEF$  即为所求.(答案不唯一)

[交流总结]

略

【课后评价】

1. B 2. D 3. M 4.  $2\sqrt{13}$  5. 略 6. 略

7. C 8. B 9. 4

10. 解: (1) 中点 E 等腰

(2)  $\because AD \parallel BC,$

$\therefore \angle D = \angle ECF, \angle DAE = \angle F.$

$\because$  点 D 与点 C 关于点 E 成中心对称,  $\therefore DE = CE.$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE (AAS).$

$\therefore S_{\triangle ADE} = S_{\triangle FCE}.$

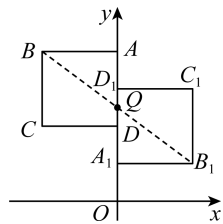
$\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\text{四边形} ABCD} = 12.$

11. 解: (1) 根据对称中心的性质, 可得对称中心是  $D_1D$  的中点.

$\because$  点  $D_1, D$  的坐标分别是  $(0, 3), (0, 2)$ ,

$\therefore$  对称中心点  $Q$  的坐标是  $(0, 2.5)$ .

如图, 连接  $BB_1$  交  $AA_1$  于点  $Q$ , 则点  $Q$  即为所求.



(2)  $\because$  点  $A, D$  的坐标分别是  $(0, 4), (0, 2)$ ,

$\therefore$  正方形  $ABCD$  与正方形  $A_1B_1C_1D_1$  的边长都是  $4-2=2$ .

$\therefore$  点  $B, C$  的坐标分别是  $(-2, 4), (-2, 2)$ .

$\because A_1D_1=2$ , 点  $D_1$  的坐标是  $(0, 3)$ ,

$\therefore$  点  $A_1$  的坐标是  $(0, 1)$ .

$\therefore$  点  $B_1, C_1$  的坐标分别是  $(2, 1), (2, 3)$ .

故顶点  $B, C, B_1, C_1$  的坐标分别是  $(-2, 4), (-2, 2), (2, 1), (2, 3)$ .

## 第2课时 中心对称图形

### 【课堂导学】

#### 任务一

问题1 解: 线段  $AB$  绕它的中点旋转  $180^\circ$  后与它本身重合.

问题2 解:  $\square ABCD$  绕它的两条对角线的交点  $O$  旋转  $180^\circ$  后与它本身重合.

问题3 解: 旋转的牌是①方片9.

新知生成  $180^\circ$  重合 中心对称图形 对称中心

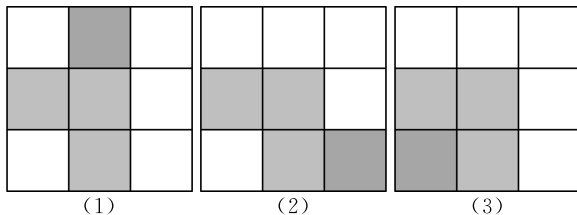
#### 【即时测评】

1. B 2. D

3. 解: (1) 如图(1)所示.(答案不唯一)

(2) 如图(2)所示.(答案不唯一)

(3) 如图(3)所示.



第3题解图

#### 【交流总结】

1. 略 2. 略 3. 略

#### 任务二

例 解: 如图,  $ON$  即为所求. 理由如下:

连接  $BF, AE$ , 交于点  $O$ , 连接  $EC, BD$  交于点  $N$ , 此时过点  $O$  的直线平分矩形  $FABE$  的面积, 过点  $N$  的直线平分菱形  $EBCD$  的面积, 故  $ON$  把这张纸片分成面积相等的两部分.

【归纳总结】 (1) 中点 (2) 面积

#### 【即时测评】

1. C 2. 3

#### 【课堂小结】

两个 一个 原来的图形 对称中心

#### 【课后评价】

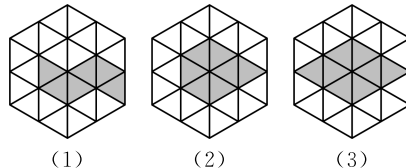
1. B 2. ③⑤ 3. D 4. B 5.  $4\sqrt{3}$  6. 12

7. 略 8. C 9. C 10. 1

11. 解: (1) 如图(1)所示.

(2) 如图(2)所示.

(3) 如图(3)所示.



第11题解图

12. 解:  $\because \angle C=90^\circ, \angle B=30^\circ, BC=1, \therefore AC=\frac{1}{2}AB$ .

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$ ,

$\therefore AB^2=\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+1^2, \therefore AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

$\therefore$  图形是一个中心对称图形,  $A$  为对称中心,

$\therefore AB'=AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}, \therefore BB'=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

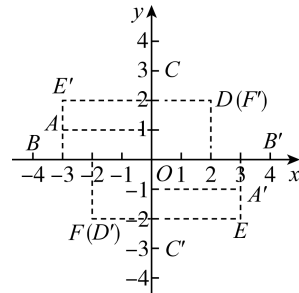
## 第3课时 关于原点对称的点的坐标

### 【课堂导学】

#### 任务一

探究1 解: 根据中心对称的性质, 对称点所连线段经过对称中心, 而且被对称中心平分, 可得点  $A, O, A'$  在同一条直线上, 且  $OA=OA'$ , 分别过点  $A, A'$  作  $x$  轴的垂线, 构造直角三角形, 利用全等可得出  $A'(-2, -1)$ .

探究2 解: 如图所示, 点  $A, B, C, D, E, F$  关于原点  $O$  的对称点分别为点  $A'(3, -1), B'(4, 0), C'(0, -3), D'(-2, -2), E'(-3, 2), F'(2, 2)$ .



这些点的横、纵坐标与已知点的横、纵坐标均互为相反数.

新知生成 相反  $(-x, -y)$

#### 【即时测评】

1. A 2. 略

#### 【交流总结】

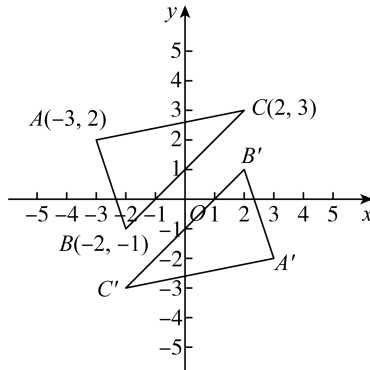
略

#### 任务二

例 解:  $\because$  点  $P(x, y)$  关于原点的对称点为  $P'(-x, -y)$ ,

$\therefore \triangle ABC$  的三个顶点  $A(-3, 2), B(-2, -1), C(2, 3)$  关于原点的对称点分别为  $A'(3, -2), B'(2, 1), C'(-2, -3)$ .

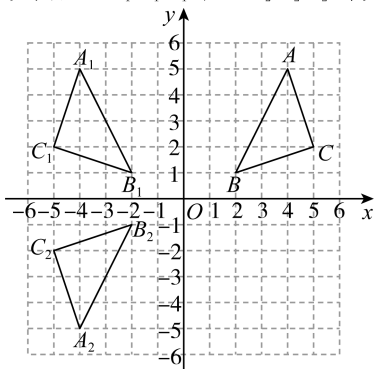
如图, 依次连接  $A'B', B'C', C'A'$ , 则  $\triangle A'B'C'$  即为所求.



【归纳总结】 (1)相反数 (2)对称 (3)对称点

【即时测评】

解: (1)(2)如图,  $\triangle A_1B_1C_1$  和  $\triangle A_2B_2C_2$  即为所求.



【课堂小结】

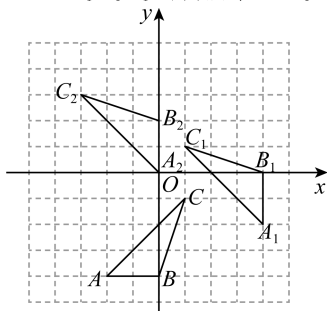
横坐标 纵坐标 互为相反数 纵坐标 横坐标

【课后评价】

1. D 2. B 3. -18 4. - 5. 略 6. 略 7. A 8. A

9.  $2 < a < 3$  10. 略

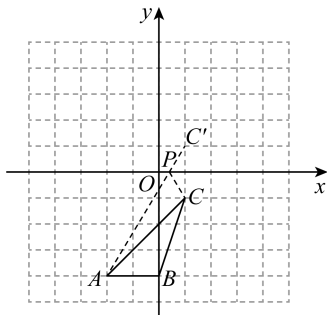
11. 解: (1)如图,  $\triangle A_1B_1C_1$  即为所求.  $\therefore C_1(1, 1)$ .



(2)如图,  $\triangle A_2B_2C_2$  即为所求.

$\therefore C_2(-3, 3)$ .

(3)如图, 作点  $C(1, -1)$  关于  $x$  轴的对称点  $C'(1, 1)$ , 连接  $AC'$  交  $x$  轴于点  $P$ ,

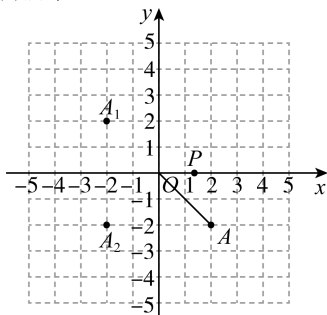


$\therefore PC = PC'$ .

当点  $A, P, C'$  共线时,  $PA + PC = PA + PC' = AC'$  值最小,

$\therefore AC' = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ , 故答案为  $\sqrt{34}$ .

12. 解: (1)  $A_1(-2, 2)$ ,  $A_2(-2, -2)$ , 如图所示, 点  $A_1, A_2$  即为所求.



(2) 设点  $P$  坐标为  $(t, 0)$ .

$\because OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ,

$\therefore$  当  $OP = OA$  时, 点  $P$  坐标为  $(-2\sqrt{2}, 0)$  或  $(2\sqrt{2}, 0)$ ;

当  $AP = AO$  时, 点  $P$  坐标为  $(4, 0)$ ;

当  $PO = PA$  时, 点  $P$  坐标为  $(2, 0)$ .

综上所述, 点  $P$  坐标为  $(-2\sqrt{2}, 0)$  或  $(2\sqrt{2}, 0)$  或  $(4, 0)$  或  $(2, 0)$ .

## 第二十九章 圆

### 29.1 圆的有关概念

#### 第1课时 圆的有关概念

【课堂导学】

任务一

问题1 解: 比如车轮、硬币、呼啦圈、井盖等.(答案不唯一)

问题2 解: 在平面内, 线段绕它固定的端点旋转一周, 另一个端点所形成的图形便是圆.

问题3 解: 圆上各点到定点(圆心  $O$ ) 的距离都等于定长(半径  $r$ ), 到定点的距离等于定长的点都在同一个圆上.

新知生成

1. 平面 一周 圆心 半径  $\odot O$

2. 平面 定点  $O$  定长  $r$

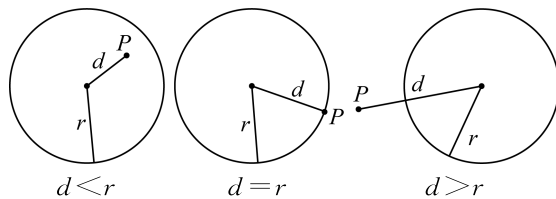
【即时测评】

1. C 2. 点  $O$  2 cm

任务二

问题1 解: 点与圆的位置关系有三种: 点在圆内, 点在圆上, 点在圆外.

问题2 解: 如图所示.



【归纳总结】  $d > r$   $d = r$   $d < r$

【即时测评】

1. D

2.  $6 < r < 10$

任务三

探究1 弦 直径

探究2  $AC$   $OC$   $AC$  直径

探究3 圆弧 圆弧  $AB$  半圆 优弧 劣弧

探究4 等圆 半径 等弧

【归纳总结】 最长 任意两点 不一定 两段弧 半圆 同圆或等圆

【即时测评】

解: (1) 劣弧:  $\widehat{AF}$ ,  $\widehat{AD}$ ,  $\widehat{AC}$ ,  $\widehat{AE}$ .

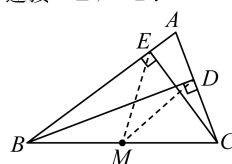
优弧:  $\widehat{AFC}$ ,  $\widehat{AFE}$ ,  $\widehat{AED}$ ,  $\widehat{AEF}$ .

(2) 弦  $AF$ ,  $AB$ ,  $AC$ , 其中弦  $AB$  又是直径.

(3) 答案不唯一, 如: 弦  $AF$ , 它所对的弧是  $\widehat{AF}$  和  $\widehat{AEF}$ .

任务四

例 证明: 如图, 连接  $ME$ ,  $MD$ .



$\because BD, CE$  分别是  $\triangle ABC$  的高,  $M$  为  $BC$  的中点,

$\therefore ME = MD = MC = MB = \frac{1}{2} BC$ .

∴点  $B, C, D, E$  在以点  $M$  为圆心的同一个圆上.

[即时测评]

解: 如图, 连接  $OD$ .

∵  $DE = OB = OD = OC$ ,

∴  $\angle C = \angle ODC = 2\angle E$ .

∴  $\angle AOC = \angle C + \angle E = 3\angle E$ .

∴  $3\angle E = 72^\circ$ . ∴  $\angle E = 24^\circ$ .

[归纳总结] 1. (1) 相等 2. (1) 圆

心 相等 (2) ① 相等且互相平分 ② 一半

【课堂小结】

$d < r$   $d > r$  到圆心的距离

【课后评价】

1. B 2. B 3.  $28^\circ$  4. B 5. 略 6. A

7. 5  $\widehat{BAD}, \widehat{ACD}$  (答案不唯一)

8. 证明: ∵  $AB, CD$  为  $\odot O$  中两条直径,

∴  $OA = OB, OC = OD$ .

∵  $CE = DF$ , ∴  $OE = OF$ .

在  $\triangle AOF$  和  $\triangle BOE$  中,

$\begin{cases} OA = OB, \\ \angle AOF = \angle BOE, \\ OF = OE, \end{cases}$

∴  $\triangle AOF \cong \triangle BOE$  (SAS). ∴  $AF = BE$ .

9. D 10. C 11. C 12. 3

13.  $\sqrt{5} < r < \sqrt{13}$  14. 略

15. 解: 如图, 连接  $OB, OC, OF$ .

易证得  $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ .

设  $OA = OD = x$ .

∵ 正方形  $EFGD$  的面积为 16,

∴  $FG = DG = 4$ .

∴  $CO^2 = DO^2 + CD^2$ ,

∴  $r^2 = x^2 + (2x)^2 = 5x^2$ .

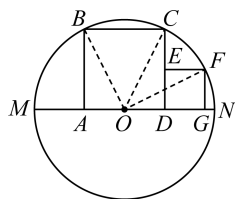
∴  $OF^2 = OG^2 + FG^2$ ,

∴  $r^2 = (x+4)^2 + 4^2 = x^2 + 8x + 32$ .

∴  $5x^2 = x^2 + 8x + 32$ , 解得  $x_1 = 4, x_2 = -2$  (舍去).

∴  $r^2 = 80$ , 解得  $r = 4\sqrt{5}$  (负值已舍去).

∴  $\odot O$  的半径  $r$  为  $4\sqrt{5}$ .



## 第2课时 过三点的圆与反证法

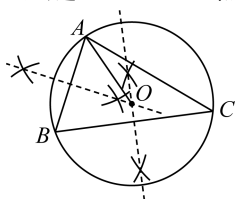
【课堂导学】

任务一

探究1 解: 以不与点  $A$  重合的任意一点为圆心, 以这个点到点  $A$  的距离为半径画圆即可. 过点  $A$  可作无数个圆.

探究2 解: 作线段  $AB$  的垂直平分线, 以其上任意一点为圆心, 以这点到点  $A$  或点  $B$  的距离为半径画圆即可. 过两点可作无数个圆.

探究3 解: 如图, 分别作出  $AB$  和  $BC$  的垂直平分线, 两条垂直平分线的交点  $O$  便是圆心, 然后以点  $O$  为圆心,  $OA$  为半径, 就能画出过  $A, B, C$  三点的圆.



过不在同一条直线上的三点只能作一个圆.

新知生成 (1) 同一条直线上 (2) 三个顶点 垂直平分线 内接三角形

[交流总结]

1. 解: 三角形的外心到三角形三个顶点的距离相等.

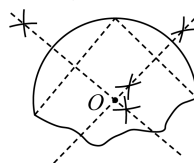
2. 解: 一个三角形有一个外接圆, 而一个圆有无数个内

接三角形.

[即时测评]

1. D 2.  $35^\circ$

3. 解: 如图, 点  $O$  即为所求.



任务二

问题探究  $90^\circ >$

新知生成 假设 矛盾 假设

[即时测评]

1. C

2. 解: 已知直线  $a, b$ . 求证: 直线  $a, b$  相交时只有一个交点  $P$ .

证明: 假设  $a, b$  相交时不止一个交点  $P$ , 不妨设其他交点中有一个为  $P'$ , 则点  $P$  和点  $P'$  既在直线  $a$  上又在直线  $b$  上, 那么经过点  $P$  和点  $P'$  的直线就有两条, 这与“两点确定一条直线”相矛盾, 因此假设不成立, 所以两直线相交只有一个交点.

【课堂小结】

三个顶点 垂直平分线 三个顶点 相反 推导 原命题

【课后评价】

1. A 2. D 3. C 4.  $30^\circ$  5. 略

6. 解: (1) B

(2) ②若  $\angle ACB = \angle ABC$ ,

则  $AB = AC$ ,

这与已知  $AC < AB$  相矛盾, ∴ 假设不成立.

综上,  $\angle ACB > \angle ABC$ .

7. C 8. B 9. 4 10. 5

11. 略

12. 解: (1) (2, 0) (2)  $20\pi$

(3) 如图(1), 连接  $AM, CM, AC$ .

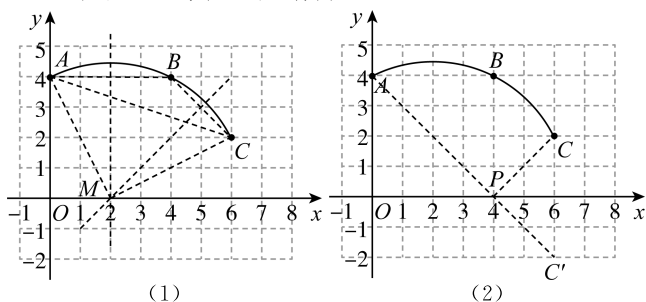
∴  $CM = AM = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ .

∴  $AC = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$ , 且  $(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 40 =$

$(2\sqrt{10})^2$ ,

∴  $AM^2 + CM^2 = AC^2$ . ∴  $\angle AMC = 90^\circ$ .

(4) 如图(2), 点  $P$  的坐标为 (4, 0).



第12题解图

## 29.2 圆的有关性质

### 第1课时 垂直于弦的直径

【课堂导学】

任务一

探究1 任意 圆上

探究2 垂直平分  $\odot O$  成立

[归纳总结] 轴对称 直径

[即时测评]

C

## 任务二

探究 1 对称轴 直径

探究 2 解: 相等.

探究 3 解:  $\widehat{AD} = \widehat{A'D}$ ,  $\widehat{CA} = \widehat{CA'}$ .

新知生成 平分 平分

探究 4 解: (1)  $CD \perp AB$ . 理由如下:

连接  $AO$ ,  $BO$  (图略), 则  $AO = BO$ .

又  $\because AE = BE$ ,  $OE = OE$ ,  $\therefore \triangle AOE \cong \triangle BOE$  (SSS).

$\therefore \angle AEO = \angle BEO = 90^\circ$ ,  $\therefore CD \perp AB$ .

(2) 由垂径定理, 可得  $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ ,  $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ .

新知生成 垂直 平分

[交流总结]

1. 解: ①过圆心; ②垂直于弦; ③平分弦; ④平分弦所对的优弧; ⑤平分弦所对的劣弧.

2. 解: 已知①直线过圆心, ③直线平分弦, 当被平分的弦本身是圆的直径时, 两条直径必然互相平分, 但不一定互相垂直, 无法推出②直线垂直于弦, 进而不能推出④⑤.

除上述①+③外, 若一条直线满足其他任意两个条件, 均能推出它也满足剩下三个条件.

[即时测评]

C

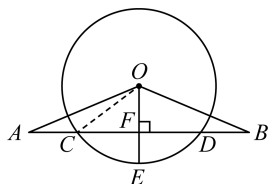
## 任务三

例 (1) 证明:  $\because OE \perp AB$ ,  $CD$  为  $\odot O$  的弦,  $\therefore CF = DF$ .

$\because OA = OB$ ,  $OE \perp AB$ ,

$\therefore AF = BF$ ,  $\therefore AF - CF = BF - DF$ ,  $\therefore AC = BD$ .

(2) 解: 如图, 连接  $OC$ .



$\because OE \perp AB$ ,  $CD$  为  $\odot O$  的弦,

$\therefore CF = \frac{1}{2}CD = 3$ ,  $\angle OFC = 90^\circ$ ,  $\therefore CO^2 = CF^2 + OF^2$ .

设  $\odot O$  的半径是  $r$ , 则  $CO = r$ ,  $OF = r - 1$ .

$\therefore r^2 = 3^2 + (r - 1)^2$ , 解得  $r = 5$ .  $\therefore \odot O$  的半径是 5.

[归纳总结] (1) 圆心 中点 (2)  $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2$

②  $h + d$

[即时测评]

1. D 2. 4

[交流总结]

解: (1) 作: 通过“作垂直”“连半径”构造出直角三角形; (2) 求: 根据勾股定理, 由直角三角形的已知边长求出未知边长, 必要时列方程求解; (3) 写: 写出实际问题的答案.

【课堂小结】

①圆心 ③平分 ⑤劣弧

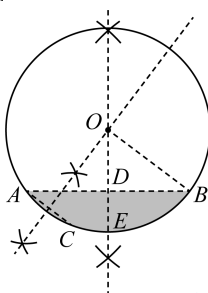
【课后评价】

1. A 2. A 3. 10 4. B 5.  $(4 - \sqrt{7})$

6. 略 7. A 8. A 9. 5 10. 2 cm 或 14 cm

11. 解: (1) 如图, 先作弦  $AB$  的垂直平分线; 在弧  $AB$  上任取一点  $C$ , 连接  $AC$ , 作弦  $AC$  的垂直平分线, 两垂直平分线交点作为圆心  $O$ ,  $OB$  作为半径, 画圆即为所求图形.

(2) 如图, 弦  $AB$  的垂直平分线交  $AB$  于点  $D$ , 交弧  $AB$  于点



$E$ , 连接  $OB$ .

$\because OE \perp AB$ ,

$\therefore BD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 16 = 8$  (cm).

由题意可知,  $ED = 4$  cm.

设半径为  $x$  cm, 则  $OD = (x - 4)$  cm.

在  $Rt\triangle BOD$  中, 由勾股定理, 得

$OD^2 + BD^2 = OB^2$ ,

$\therefore (x - 4)^2 + 8^2 = x^2$ , 解得  $x = 10$ ,

即这个圆形截面的半径为 10 cm.

## 第 2 课时 圆心角

【课堂导学】

任务一

问题 解: 顶点都在圆心上, 两边都和圆相交.

新知生成 圆心

[即时测评]

$\widehat{AB}$   $AB$

任务二

探究 1 解: 把圆绕圆心旋转任意一个角度, 所得图形与原图形重合, 即圆是旋转对称图形.

探究 2 解: 在  $\odot O$  中, 如果  $\angle AOB = \angle COD$ , 那么  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ,  $AB = CD$ .

探究 3 解: 仍然有  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ,  $AB = CD$ .

新知生成 相等 相等

探究 4 解: 在同圆或等圆中, 如果两条弧相等, 那么它们所对的圆心角相等, 所对的弦相等.

探究 5 解: 在同圆或等圆中, 如果两条弦相等, 那么它们所对的圆心角相等, 所对的优弧和劣弧分别相等.

新知生成 等圆 弧 弦 相等

[交流总结]

解: 不能去掉. 理由如下:

如图, 显然,  $\widehat{AB} > \widehat{CD}$ ,

$AB > CD$ .

[即时测评]

1. C 2. 3

【课堂小结】

顶点 同圆 圆心角 一组 分别相等

【课后评价】

1. B 2.  $36^\circ$  3. B 4. B 5.  $60^\circ$

6. 证明:  $\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$\therefore AD = BC$ ,  $\therefore \widehat{AD} = \widehat{BC}$ .

$\because M$  为  $\widehat{CD}$  的中点,

$\therefore \widehat{MD} = \widehat{MC}$ ,  $\therefore \widehat{AM} = \widehat{BM}$ ,  $\therefore AM = BM$ .

7. C 8. B 9. B 10.  $20^\circ$  11. 略

12. (1) 解: 如图, 连接  $EO$ .

设  $\odot O$  的半径为  $r$ .

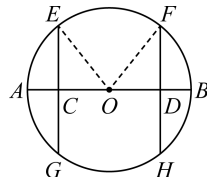
$\because EG \perp AB$ ,  $\therefore CE = CG = \frac{1}{2}EG = 4$ .

$\because AC = 2$ ,  $\therefore OC = r - 2$ .

在  $Rt\triangle CEO$  中,  $OE^2 = CE^2 + OC^2$ ,

$\therefore r^2 = 4^2 + (r - 2)^2$ , 解得  $r = 5$ .

$\therefore \odot O$  的半径为 5.



(2) 证明: 如图, 连接  $OF$ .

$\because AC=BD, OA=OB, \therefore OC=OD.$   
 $\because EG \perp AB, FH \perp AB,$   
 $\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle COE$  和  $\text{Rt}\triangle DOF$  中,  $\begin{cases} OC=OD, \\ OE=OF. \end{cases}$   
 $\therefore \text{Rt}\triangle COE \cong \text{Rt}\triangle DOF (\text{HL}).$   
 $\therefore \angle AOE = \angle BOF, \therefore \widehat{AE} = \widehat{BF}.$   
 (3) 解:  $\widehat{AE} = \widehat{EF} = \widehat{FB}$  成立. 理由如下:  
 $\because C, D$  分别为  $OA, OB$  的中点,  
 $\therefore OC = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OE, \therefore \angle OEC = 30^\circ, \therefore \angle AOE = 60^\circ.$   
 同理  $\angle BOF = 60^\circ,$   
 $\therefore \angle EOF = 60^\circ, \therefore \widehat{AE} = \widehat{EF} = \widehat{FB}.$

### 第3课时 圆周角

#### 【课堂导学】

##### 任务一

问题 解: 顶点在  $\odot O$  上, 角的两边分别与  $\odot O$  相交于两点.

新知生成 圆上 相交

[即时测评]

1. B

2.  $\angle ACB, \angle BED, \angle DBE$  (答案不唯一)

##### 任务二

推导论证 (1)  $\angle C$   $\angle C$  (2)  $\angle COD$   $\angle CAD$   $\angle COD$

(3)  $\angle DAB$   $\angle DOB$

新知生成 一半

[即时测评]

1. C 2.  $20^\circ$

##### 任务三

探究1 解: 相等. 理由如下:

$$\because \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC, \angle BDC = \frac{1}{2} \angle BOC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BDC.$$

探究2 解: 相等. 理由如下:

$$\because \widehat{CD} = \widehat{EF}, \therefore \angle COD = \angle EOF.$$

$$\because \angle A = \frac{1}{2} \angle COD, \angle B = \frac{1}{2} \angle EOF, \therefore \angle A = \angle B.$$

新知生成 相等

探究3 解:  $\because OA=OB=OC,$

$\therefore \triangle AOC, \triangle BOC$  都是等腰三角形.

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA, \angle OBC = \angle OCB.$$

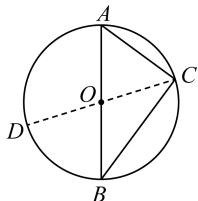
$$\text{又} \because \angle OAC + \angle OBC + \angle ACB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle OCA + \angle OCB = 180^\circ \div 2 = 90^\circ.$$

$\therefore \angle ACB$  是直角.

探究4 解: 是直径. 理由如下:

如图, 连接  $CO$  并延长, 交  $\odot O$  于点  $D$ .



由题意, 得  $\angle AOD = 2\angle ACD, \angle BOD = 2\angle BCD.$

$$\text{又} \because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle AOD + \angle BOD = 2(\angle ACD + \angle BCD) = 2\angle ACB = 180^\circ.$$

$\therefore A, O, B$  三点共线.  $\therefore$  弦  $AB$  是直径.

新知生成 直角 直径

[即时测评]

1. C 2.  $40^\circ$

#### 【课堂小结】

顶点 两边 (1) 圆心角 (2) 同弧 等弧 (3) 直径  $90^\circ$

#### 【课后评价】

1. D 2. C 3.  $120^\circ$

4. 解:  $\because \angle COD = 60^\circ,$

$$\therefore \angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD = 30^\circ.$$

$$\because \angle ABC = 50^\circ, \therefore \angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 20^\circ.$$

5. B 6. D 7.  $\sqrt{2}$  8. 略

9. D 10. C 11.  $25^\circ$  12. 略

13. (1) 证明: 如图, 连接  $BC$ .

$\because \angle PCB$  的度数等于  $\widehat{BD}$  的度数的一半,  $\angle PBC$  的度数等于  $\widehat{AC}$  的度数的一半,  $\widehat{AC}$  的度数为  $\alpha$ ,  $\widehat{BD}$  的度数为  $\beta$ ,

$$\therefore \angle PCB = \frac{1}{2} \beta, \angle PBC = \frac{1}{2} \alpha.$$

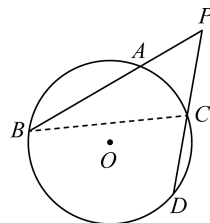
$$\because \angle APC = \angle PBC + \angle PCB,$$

$$\therefore \angle APC = \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{2} (\alpha + \beta).$$

(2) 解: 问题(1)中的结论不成立, 类似的结论为

$$\angle APC = \frac{1}{2} (\beta - \alpha). \text{证明如下:}$$

如图, 连接  $BC$ .



$$\because \angle APC + \angle PBC = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle APC = \angle BCD - \angle PBC.$$

$\because \angle BCD$  的度数等于  $\widehat{BD}$  的度数的一半,  $\angle PBC$  的度数等于  $\widehat{AC}$  的度数的一半,  $\widehat{AC}$  的度数为  $\alpha$ ,  $\widehat{BD}$  的度数为  $\beta$ ,

$$\therefore \angle APC = \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} (\beta - \alpha).$$

### 第4课时 圆内接四边形

#### 【课堂导学】

##### 任务一

问题1 解: 它的五个顶点都在圆上.

问题2 解: 四边形  $ABCD$  的四个顶点都在同一个圆上; 四边形  $OBCD$  有三个顶点在圆上, 有一个顶点在圆心.

新知生成 同一个圆上 外接圆

[即时测评]

1. D 2.  $\angle 2, \angle 5, \angle 6$

##### 任务二

探究  $180^\circ$   $180^\circ$   $360^\circ$   $180^\circ$   $180^\circ$

新知生成 互补

[交流总结]

$$\text{解: } \because \angle A + \angle BCD = 180^\circ, \angle BCD + \angle DCE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle DCE.$$

结论: 圆内接四边形的任意一个外角都等于它的内对角.

[即时测评]

1. D 2.  $69^\circ$

3. 证明:  $\because$  四边形  $ABCD$  为  $\odot O$  的内接四边形,

$$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ. \therefore \angle C = \angle D,$$

$$\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ. \therefore AB \parallel CD.$$

## 【课堂小结】

顶点 对角 内对角

## 【课后评价】

1. A 2. B 3. C 4.  $130^\circ$  5.  $140^\circ$

6. 证明:  $\because$  四边形  $ABCD$  是  $\odot O$  的内接四边形,

$$\therefore \angle CDA + \angle B = 180^\circ.$$

$$\because \angle B = 50^\circ, \therefore \angle CDA = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

$$\therefore \angle CDE = 180^\circ - \angle CDA = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ.$$

$$\because \angle DCB = 100^\circ, \therefore \angle CDE + \angle E = 100^\circ.$$

$$\therefore \angle E = 50^\circ, \therefore \angle E = \angle CDE.$$

$$\therefore CD = CE, \therefore \triangle CDE \text{ 是等腰三角形.}$$

7. D 8. B 9. C 10.  $6\sqrt{3}$

11. 解: (1)  $\because$  四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ,  $\angle B = 125^\circ$ ,

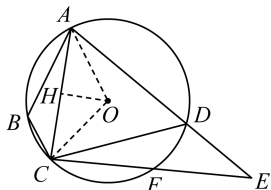
$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ.$$

$$\because \widehat{DF} = \widehat{BC}, \angle BAC = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle BAC = 25^\circ.$$

$$\therefore \angle E = \angle ADC - \angle DCE = 55^\circ - 25^\circ = 30^\circ.$$

(2) 如图, 连接  $AO$ ,  $CO$ , 过点  $O$  作  $OH \perp AC$  于点  $H$ , 则  $AO = CO = 6$ .



$\because$  四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ,  $\therefore \angle B + \angle ADC = 180^\circ$ .

$$\therefore \angle B = 2\angle ADC,$$

$$\therefore \angle ADC = 60^\circ, \angle B = 2\angle ADC = 120^\circ.$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle ADC = 120^\circ.$$

$$\therefore OA = OC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOC) = 30^\circ.$$

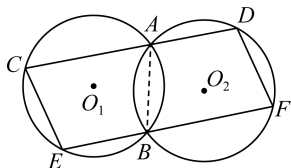
$$\because AO = 6, OH \perp AC, \therefore OH = \frac{1}{2}AO = 3.$$

由勾股定理, 得  $AH = \sqrt{AO^2 - OH^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ .

$\because OH \perp AC$ ,  $OH$  过圆心  $O$ ,

$$\therefore AH = CH = 3\sqrt{3}, \therefore AC = AH + CH = 6\sqrt{3}.$$

12. 证明: (1) 如图, 连接  $AB$ .



$\because$  四边形  $ABEC$  是  $\odot O_1$  的内接四边形,

$$\therefore \angle BAD = \angle E.$$

又  $\because$  四边形  $ADFB$  是  $\odot O_2$  的内接四边形,

$$\therefore \angle BAD + \angle F = 180^\circ, \therefore \angle E + \angle F = 180^\circ.$$

$$\therefore CE \parallel DF.$$

$$\because CD \parallel EF, \therefore \text{四边形 } CEFD \text{ 是平行四边形.}$$

(2) 由(1)得四边形  $CEFD$  是平行四边形,

$$\therefore CE = DF, \therefore \widehat{CE} = \widehat{DF}.$$

## 29.3 弧长和扇形面积

### 第1课时 弧长和扇形面积

#### 【课堂导学】

##### 任务一

问题 1  $C = 2\pi R$

问题 2 (1)  $\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$  (2)  $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$  (3)  $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$  (4)  $\frac{n}{360}$

新知生成  $2\pi R$   $\frac{2\pi R}{360}$   $\frac{\pi R}{180}$   $\frac{n\pi R}{180}$

实践应用 12

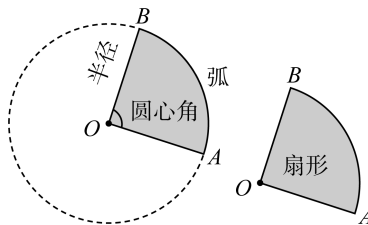
[即时测评]

A

#### 任务二

问题 1 解: 由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧围成的图形叫作扇形.

如图, 阴影部分是一个扇形, 记作扇形  $AOB$ .



问题 2  $S = \pi R^2$

问题 3 (1)  $\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$  (2)  $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$  (3)  $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$

(4)  $\frac{n}{360}$

新知生成  $\pi R^2$   $\frac{\pi R^2}{360}$   $\frac{n\pi R^2}{360}$   $\frac{1}{2}lR$

实践应用  $\frac{2}{3}\pi$

[即时测评]

150

[交流总结]

解: 求阴影部分面积的常用方法有以下三种.

①公式法: 所求图形是规则图形, 如扇形、特殊四边形等, 可直接套用公式计算.

②和差法: 所求图形不是规则图形, 可通过转化成规则图形的面积的和或差计算.

③等积变形法: 无法直接求解或求解较麻烦时, 可通过对图形的平移、旋转、割补等手段, 化不规则图形为规则图形, 再应用公式法或和差法求解.

#### 【课堂小结】

半径 弧  $\frac{n\pi R}{180}$   $\frac{n\pi R^2}{360}$   $\frac{1}{2}lR$  和差

#### 【课后评价】

1. C 2.  $70^\circ$

3. 解: (1)  $\because \widehat{AB}$  的半径  $OA = 2$ ,  $OC \perp AB$  于点  $C$ ,  $\angle AOC = 60^\circ$ ,  $\therefore \angle OAC = 30^\circ$ .

$$\therefore OC = \frac{1}{2}OA = 1, \therefore AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore AB = 2AC = 2\sqrt{3}.$$

$$(2) \because OC \perp AB, \angle AOC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 120^\circ.$$

$$\because OA = 2, \therefore \widehat{AB} \text{ 的长是 } \frac{120\pi \times 2}{180} = \frac{4\pi}{3}.$$

4. C 5. A 6. 6 7. 略

8. C 9. C 10. C 11.  $\frac{\pi}{3}$  12.  $90^\circ$

13. (1) 证明:  $\because$  在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\therefore \angle B = 60^\circ, \therefore \angle COD = 120^\circ$ .

$\because BC = 4$ ,  $BC$  为半圆  $O$  的直径,

$$\therefore \angle CDB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle BCD = 30^\circ, \therefore BC = 2BD.$$

$$\because \angle A = 30^\circ, \therefore AB = 2BC = 4BD, \therefore AD = 3BD.$$

(2) 解: 由(1)得  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\therefore OC = OD = OB = 2$ .

$$\therefore \widehat{BD} \text{ 的长为 } \frac{60\pi \times 2}{180} = \frac{2}{3}\pi.$$

(3)解:  $\because BC=4, \angle BCD=30^\circ,$

$$\therefore BD=2. \therefore CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=2\sqrt{3}.$$

在  $\triangle COD$  中, 易得边  $CD$  上的高为 1.

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} COD} - S_{\triangle COD} = \frac{120\pi \times 2^2}{360} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 =$$

$$\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

## 第2课时 圆锥的侧面积和全面积

### 【课堂导学】

#### 任务一

探究1 解: 圆锥可看作由一个直角三角形绕其某一直角边所在直线旋转一周形成的图形. 圆锥是由一个底面和一个侧面围成的几何体.

探究2 无数 相等 底面圆心

新知生成  $r^2 + h^2 = l^2$

[即时测评]

(1) $\sqrt{3}$  (2)5 (3)6

#### 任务二

问题1 解: 扇形的弧长与底面的周长相等.

问题2 解: 扇形半径与圆锥的母线长相等.

新知生成 底面周长  $\pi rl$   $\pi r(r+l)$  或  $\pi r^2 + \pi rl$

[即时测评]

解: 这个圆锥的侧面积为  $\pi \times 12 \times 20 = 240\pi(\text{cm}^2)$ , 这个圆锥的全面积为  $240\pi + \pi \times 12^2 = 384\pi(\text{cm}^2)$ .

#### 任务三

例 解: (1) 设圆锥母线长为  $l$ , 底面圆的半径为  $r$ .

根据题意, 得  $2\pi r = \frac{180 \cdot \pi \cdot l}{180}$ ,

$\therefore l=2r$ , 即圆锥母线长与底面半径的比为  $2:1$ .

(2)  $\because r^2 + (3\sqrt{3})^2 = l^2$ ,

即  $r^2 + (3\sqrt{3})^2 = 4r^2$ ,

解得  $r_1=3, r_2=-3$  (不符合题意, 舍去).  $\therefore l=2r=6 \text{ cm}$ .

$\therefore$  圆锥的全面积为  $\pi \times 3^2 + \pi \times 3 \times 6 = 27\pi(\text{cm}^2)$ .

[即时测评]

1. B 2. 16

[归纳总结] (1) 半径 弧长 (2) 直角 勾股

### 【课堂小结】

顶点 任意一点 母线长 底面圆周长  $\pi rl$   $\pi r^2 + \pi rl$

### 【课后评价】

1. B 2. 160

3. 解: 设圆锥的底面圆的半径为  $r$ , 则  $2\pi r = 6\pi$ , 解得

$$r=3. \text{ 设扇形 } AOB \text{ 的半径为 } R, \text{ 则 } \frac{120\pi \cdot R}{180} = 6\pi, \text{ 解得}$$

$$R=9. \text{ 所以圆锥形纸帽的高为 } \sqrt{9^2-3^2} = 6\sqrt{2}.$$

4. A 5. B 6. 4

$$7. \text{ 解: (1) 由题意, 得 } 3 \times 2\pi r = \frac{270 \times \pi \times 16}{180},$$

解得  $r=4$ .

$\therefore$  圆锥的底面半径为  $4 \text{ cm}$ .

(2) 圆锥的全面积为  $\pi \times 4^2 + \pi \times 4 \times 16 = 80\pi(\text{cm}^2)$ .

8. D 9. B 10. 18 11. 略

12. 解: (1) 圆锥的母线长为  $\sqrt{20^2 + (40\sqrt{2})^2} = 60(\text{cm})$ . 设这个锥形漏斗的侧面展开图的圆心角为  $n^\circ$ ,

$$\text{则 } 2\pi \cdot 20 = \frac{n \cdot \pi \cdot 60}{180}, \text{ 解得 } n=120.$$

故这个锥形漏斗的侧面展开图的圆心角为  $120^\circ$ .

(2) 如图(1), 过点  $O$  作  $OH \perp AD$  于点  $H$ .

$OM=60 \text{ cm}, \angle MON=120^\circ$ .

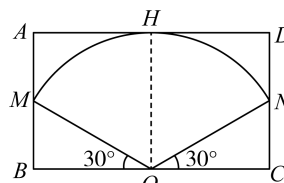
在  $\text{Rt}\triangle OBM$  中,  $\because \angle BOM=30^\circ$ ,

$$\therefore BM = \frac{1}{2} OM = 30 \text{ cm}.$$

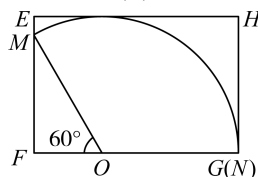
$$\therefore OB = \sqrt{OM^2 - BM^2} = 30\sqrt{3} \text{ cm}.$$

$$\therefore BC = 2OB = 60\sqrt{3} \text{ cm}.$$

$\therefore$  图(1)方案所需的矩形铁皮的面积为  $60 \times 60\sqrt{3} = 3\,600\sqrt{3}(\text{cm}^2)$ .



(1)



(2)

第12题解图

如图(2),  $OM=ON=60 \text{ cm}, \angle MON=120^\circ$ .

在  $\text{Rt}\triangle FOM$  中,  $\because \angle FOM=60^\circ$ ,

$$\therefore OF = \frac{1}{2} OM = 30 \text{ cm}.$$

$$\therefore FG = OF + OG = 30 + 60 = 90(\text{cm}).$$

$\therefore$  图(2)方案所需的矩形铁皮的面积为  $90 \times 60 = 5\,400(\text{cm}^2)$ .

$$\because 3\,600\sqrt{3} > 5\,400,$$

$\therefore$  图(2)方案所需的矩形铁皮面积较少.

## 第三十章 直线与圆的位置关系

### 30.1 直线与圆

#### 第1课时 直线与圆相离、相切、相交

### 【课堂导学】

#### 任务一

问题1 解: 直线与圆的公共点个数分别为 2, 1, 0, 则直线与圆的位置关系有三种.

问题2 解: 公共点最少时有 0 个, 最多时有 2 个.

新知生成 0 1 2 切线 割线

[即时测评]

(1) $\sqrt{}$  (2) $\times$  (3) $\times$  (4) $\times$  (5) $\times$

#### 任务二

问题探究 解: 圆心到直线的距离  $d$  也在变化, 有  $d < r$ ,  $d = r$ ,  $d > r$  三种情况. 数量关系.

新知生成  $d > r$   $d = r$   $d < r$

[即时测评]

1. A 2. 2

3. 解:  $\because$  四边形  $ABCD$  为矩形,

$$\therefore \angle B = \angle D = 90^\circ.$$

$$\therefore AB \perp BC, AD \perp DC.$$

(1)  $\because$  圆心  $A$  到边  $BC$  的距离  $AB=3$ ,  $\odot A$  与  $BC$  相切,  $\therefore r=AB=3$ .

$\therefore$  当半径  $r$  为 3 时,  $\odot A$  与直线  $BC$  相切.

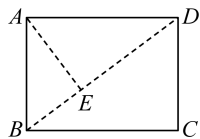
(2) 如图, 连接  $BD$ , 过点  $A$  作  $AE \perp BD$  于点  $E$ .

$\because$  在  $\text{Rt}\triangle ABD$  中,  $AB=3, AD=4$ ,

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5.$$

$$\text{又} \because S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AE = \frac{1}{2} AB \cdot AD,$$

$$\therefore \text{圆心 } A \text{ 到 } BD \text{ 的距离 } AE = \frac{12}{5} =$$



2.4.

又  $\because \odot A$  与  $BD$  相切,  $\therefore r = AE = 2.4$ .

$\therefore$  当半径  $r$  为 2.4 时,  $\odot A$  与直线  $BD$  相切.

(3)  $\because \odot A$  与直线  $BC$  相交, 圆心  $A$  到边  $BC$  的距离  $AB = 3$ ,  $\therefore r > 3$ .

又  $\because \odot A$  与直线  $CD$  相离, 圆心  $A$  到边  $CD$  的距离  $AD = 4$ ,  $\therefore r < 4$ .

$\therefore$  当半径  $r$  的范围为  $3 < r < 4$  时,  $\odot A$  与直线  $BC$  相交且与直线  $CD$  相离.

#### 【课堂小结】

没有  $>$  一个  $=$  两个  $<$

#### 【课后评价】

1. B 2. A 3. 2

4. 解: 由题中已知条件, 得  $BO \perp AC$ ,  $BO = \frac{1}{2} BD =$

$\frac{1}{2} \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{2}$ , 即点  $B$  到  $AC$  的距离为  $\sqrt{2}$ , 与  $\odot B$  的半径相等.  $\therefore$  直线  $AC$  与  $\odot B$  相切.

$\because EF \parallel AB$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $\therefore BE \perp EF$ , 垂足为  $E$ , 且  $BE = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 2 = 1 < \sqrt{2}$ .  $\therefore$  直线  $EF$  与  $\odot B$  相交.

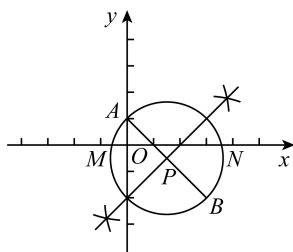
综上, 以点  $B$  为圆心,  $\sqrt{2}$  为半径的圆与直线  $AC$  相切, 与直线  $EF$  相交.

5. D 6. D 7.  $3 \leq r \leq 5$  8. 略 9. B 10. 相离

11.  $r = \sqrt{3}$  或  $2 < r \leq 2\sqrt{3}$  12. 略

13. 解: (1)  $n^2 + bn + c = 0$

(2) 如图, 在坐标系中找到  $A(0, 1)$ ,  $B(3, -2)$ , 连接  $AB$ , 分别以点  $A, B$  为圆心, 大于  $\frac{1}{2} AB$  的长为半径作弧, 连接两弧的交点与  $AB$  交于点  $P$ , 以点  $P$  为圆心,  $AB$  为直径作圆, 圆与  $x$  轴的交点即为点  $M, N$ .



(3)  $\odot C$  与  $x$  轴相切. 理由如下:

由题意, 得  $x^2 - 6x + 9 = 0$ .

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0,$$

$\therefore$  方程  $x^2 - 6x + 9 = 0$  有两个相等的实数根.

$\therefore \odot C$  与  $x$  轴只有一个交点, 即  $\odot C$  与  $x$  轴相切.

$$(4) x^2 + bx + ac = 0$$

## 第 2 课时 切线的性质和判定

#### 【课堂导学】

##### 任务一

(1) 不垂直 垂直 (2) 半径 相交 直线  $l$  是  $\odot O$  的切线  
(3) 垂直

新知生成 垂直 切点

#### 【即时测评】

1. C 2.  $20^\circ$

[归纳总结] 半径 垂直

##### 任务二

探究 1  $OA$  相等 相切

探究 2  $OA$  等于

新知生成 外端 垂直

#### 【即时测评】

解: (1) 不是, 因为  $OA$  不垂直于直线  $l$ ; (2)(3) 不是, 因为直线  $l$  没有经过半径的外端.

#### 【交流总结】

解: 判断一条直线是一个圆的切线有三种方法.

① 定义法: 直线和圆只有一个公共点时, 我们说这条直线是圆的切线;

② 数量关系法: 圆心到这条直线的距离等于半径(即  $d = r$ ) 时, 这条直线与圆相切;

③ 判定定理法: 经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

##### 任务三

例 证明: 连接  $OC$  (图略).  $\because OA = OB$ ,  $CA = CB$ ,

$\therefore OC$  是等腰三角形  $OAB$  的底边  $AB$  上的中线.

$\therefore AB \perp OC$ .

$\because OC$  是  $\odot O$  的半径,  $\therefore AB$  是  $\odot O$  的切线.

#### 【即时测评】

证明: 如图, 过点  $D$  作  $DE \perp AC$  于点  $E$ .

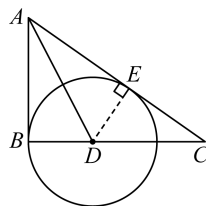
$\because \angle ABC = 90^\circ$ ,  $\therefore DB \perp AB$ .

又  $\because AD$  平分  $\angle BAC$ ,  $DE \perp AC$ ,

$\therefore DE = DB$ .  $\therefore DE$  是  $\odot D$  的半径.

$\because DE \perp AC$ ,

$\therefore AC$  是  $\odot D$  的切线.



[归纳总结] (1) 半径 垂直 (2) 垂直 半径

#### 【课堂小结】

公共点 圆的半径 垂直于过切点 连半径, 得垂直 半径的外端 这条半径 连半径, 证垂直 作垂直, 证半径 公共点 圆的半径

#### 【课后评价】

1. B 2. B 3.  $66^\circ$  4. 略 5. D

6. 角的平分线上的点到角两边的距离相等; 若圆心到直线的距离等于半径, 则这条直线为圆的切线

7. 略 8. C 9. A 10.  $85^\circ$

11. (1) 证明: 如图, 过点  $O$  作  $OE \perp CD$ , 垂足为  $E$ .

$\because BC$  是半圆  $O$  的切线,  $B$  为切点,

$\therefore OB \perp BC$ .

$\because CO$  平分  $\angle BCD$ ,

$\therefore OE = OB$ .

$\because OB$  是半圆  $O$  的半径,

$\therefore OE$  是半圆  $O$  的半径.

$\therefore CD$  是半圆  $O$  的切线.

(2) 解: 如图, 连接  $OD$ , 过点  $D$  作  $DF \perp BC$ , 垂足为  $F$ , 则  $\angle DFB = 90^\circ$ .

$\because AD$  是半圆  $O$  的切线, 切点为  $A$ ,

$\therefore \angle DAO = 90^\circ$ .

$\because OB \perp BC$ ,

$\therefore \angle OBC = 90^\circ$ .  $\therefore$  四边形  $ADFB$  是矩形.

$\therefore AD = BF = 20$ ,  $DF = AB$ .

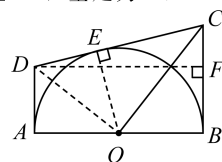
$\because AD, CD, BC$  是半圆  $O$  的切线, 切点分别为  $A, E, B$ ,

易证  $\triangle AOD \cong \triangle EOD$ ,  $\triangle OBC \cong \triangle OEC$ ,

$\therefore DE = AD = 20$ ,  $EC = BC$ .

$\because CD = 50$ ,  $\therefore EC = CD - DE = 50 - 20 = 30$ .

$\therefore BC = 30$ ,  $\therefore CF = BC - BF = 10$ .



在  $\text{Rt}\triangle CDF$  中, 由勾股定理, 得  
 $DF = \sqrt{CD^2 - CF^2} = \sqrt{50^2 - 10^2} = 20\sqrt{6}$ ,  
 $\therefore AB = DF = 20\sqrt{6}$ .  
 $\therefore BC$  的长为 30,  $AB$  的长为  $20\sqrt{6}$ .

### 第 3 课时 切线长定理

#### 【课堂导学】

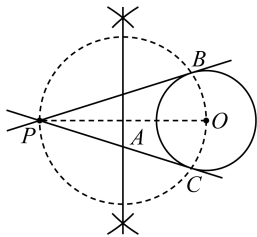
##### 任务一

探究 (1)  $90^\circ$  直径 直径 两 两  
 (2) 垂直平分线 点  $C$   $CO$   $PA$   $PB$

新知生成 两条

[即时测评]

解: (1) 如图所示.



(2)  $90^\circ$  直径所对的圆周角是直角 经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线

##### 任务二

探究 1 解:  $OB$  是  $\odot O$  的一条半径,  $PB$  是  $\odot O$  的切线,  
 $PA = PB$ ,  $\angle APO = \angle BPO$ .

探究 2 证明:  $\because PA, PB$  是  $\odot O$  的两条切线,

$\therefore OA \perp PA$ ,  $OB \perp PB$ .

$\because OA = OB$ ,  $OP = OP$ ,

$\therefore \text{Rt}\triangle OAP \cong \text{Rt}\triangle OBP$  (HL).

$\therefore PA = PB$ ,  $\angle APO = \angle BPO$ .

新知生成 (1) 切点 线段 (2) 圆外 相等 夹角

[即时测评]

10

#### 【课后评价】

1. B 2. D 3. A 4. 3 5.  $75^\circ$   
 6. 略 7. C 8. D 9.  $219^\circ$  10. 略  
 11. (1) 证明: 如图, 连接  $OP$ .

$\because PA, PC$  分别与  $\odot O$  相切于点  $A, C$ ,

$\therefore PA = PC$ ,  $OA \perp PA$ .

$\because OA = OC$ ,  $OP = OP$ ,

$\therefore \triangle OPA \cong \triangle OPC$  (SSS).

$\therefore \angle AOP = \angle POC$ .

$\because QP \perp PA$ ,

$\therefore QP \parallel BA$ .

$\therefore \angle QPO = \angle AOP$ .

$\therefore \angle QOP = \angle QPO$ .

$\therefore OQ = PQ$ .

(2) 解: 设  $OA = r$ , 则  $PQ = OQ = 6 + r$ ,  $AB = 2r$ .

$\because PA, PC$  分别与  $\odot O$  相切于点  $A, C$ ,

$\therefore OC \perp PC$ ,  $PA = PC$ .

$\therefore \angle OCP = \angle PCQ = 90^\circ$ .

$\therefore PA = AB$ ,

$\therefore PC = AB = 2r$ .

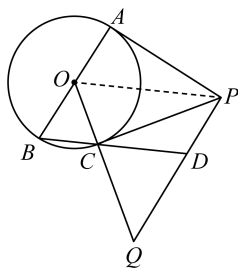
在  $\text{Rt}\triangle PCQ$  中,  $\because PQ^2 = CQ^2 + PC^2$ ,

$\therefore (6 + r)^2 = 6^2 + (2r)^2$ ,

解得  $r = 4$  或  $r = 0$  (不符合题意, 舍去).

$\therefore OP = \sqrt{OA^2 + PA^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$ .

$\therefore OB = OC$ ,



$\therefore \angle B = \angle OCB$ .

$\therefore \angle AOC = \angle AOP + \angle POC = \angle B + \angle OCB$ ,

$\angle AOP = \angle POC$ ,

$\therefore \angle AOP = \angle B$ .  $\therefore OP \parallel BD$ .

$\therefore$  由 (1) 得,  $QP \parallel BA$ ,

$\therefore$  四边形  $OBPD$  是平行四边形.

$\therefore BD = OP = 4\sqrt{5}$ .

### 30.2 三角形的内切圆

#### 【课堂导学】

##### 任务一

探究 1 解: 如图, 最大的圆与三角形三边都相切.



探究 2 解: 作三角形任意两个角的平分线, 其交点即为所求作的圆心.

新知生成 相切 内切

[即时测评]

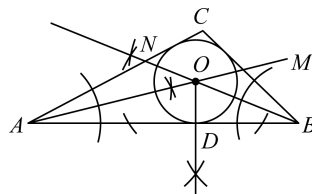
解: 如图.

作法: (1) 作  $\angle A$  和  $\angle B$  的平分线  $AM$  和  $BN$ , 交点为  $O$ ;

(2) 过点  $O$  作  $OD \perp AB$ , 垂足为  $D$ ;

(3) 以点  $O$  为圆心、 $OD$  为半径作  $\odot O$ .

$\odot O$  即为所求作的圆.



##### 任务二

例 证明: 如图, 连接  $BE$ .

$\because$  点  $E$  为内心,

$\therefore AE$  平分  $\angle BAC$ ,  $BE$  平分  $\angle ABC$ .

$\therefore \angle ABE = \angle CBE$ ,

$\angle BAD = \angle CAD$ .

$\therefore \widehat{CD}$  和  $\widehat{BD}$  所对的圆周角相等.

$\therefore \widehat{CD} = \widehat{BD}$ ,  $DB = DC$ .

$\therefore \angle DBC = \angle CAD$ .

$\therefore \angle DBC = \angle BAE$ .

$\because \angle DBE = \angle CBE + \angle DBC$ ,  $\angle DEB = \angle ABE + \angle BAE$ ,

$\therefore \angle DBE = \angle DEB$ .  $\therefore DE = DB$ .  $\therefore DB = DC = DE$ .

[归纳总结] 角平分线 三边

[即时测评]

解: 如图, 连接  $IB, IC$ .

$\because$  点  $I$  是  $\triangle ABC$  的内心,

$\therefore BI, CI$  分别是  $\angle ABC, \angle ACB$

的平分线.

$\therefore \angle BIC = 180^\circ - (\angle IBC + \angle ICB) =$

$180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 180^\circ -$

$\frac{1}{2} \times (43^\circ + 61^\circ) = 128^\circ$ .

$\frac{1}{2} \times (43^\circ + 61^\circ) = 128^\circ$ .

$\frac{1}{2} \times (43^\circ + 61^\circ) = 128^\circ$ .

$\frac{1}{2} \times (43^\circ + 61^\circ) = 128^\circ$ .

$\frac{1}{2} \times (43^\circ + 61^\circ) = 128^\circ$ .

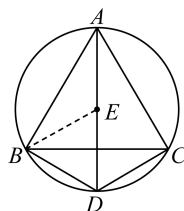
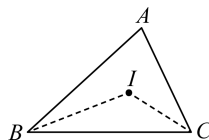
$\frac{1}{2} \times (43^\circ + 61^\circ) = 128^\circ$ .

$\frac{1}{2} \times (43^\circ + 61^\circ) = 128^\circ$ .

$\frac{1}{2} \times (43^\circ + 61^\circ) = 128^\circ$ .

$\frac{1}{2} \times (43^\circ + 61^\circ) = 128^\circ$ .

$\frac{1}{2} \times (43^\circ + 61^\circ) = 128^\circ$ .



$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A).$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A.$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A.$$

(2)  $\because$  点  $O$  是  $\triangle ABC$  内切圆的圆心,

$\therefore BO, CO$  分别是  $\angle ABC, \angle ACB$  的平分线.

由(1), 得  $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ .

$\because$  点  $O'$  是  $\triangle ABC$  外接圆的圆心,

$$\therefore \angle A = \frac{1}{2}\angle BO'C.$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A = 90^\circ + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\angle BO'C = 90^\circ + \frac{1}{4}\angle BO'C.$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{4}\angle BO'C.$$

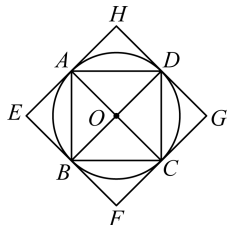
### 30.3 正多边形与圆

#### 【课堂导学】

##### 任务一

**探究 1 解:** 各边相等、各角也相等的多边形叫作正多边形. 矩形不是正多边形, 因为矩形不符合各边相等; 菱形也不是正多边形, 因为菱形不符合各角相等.

**探究 2 解:** 如图, 过圆心作两条互相垂直的直径, 分别与圆交于点  $A, C, B, D$ , 则点  $A, B, C, D$  将圆四等分; 依次连接各等分点, 可得到圆内接正方形  $ABCD$ ; 过各等分点作圆的切线, 能得到圆外切正方形  $EFGH$ .



**探究 3 解:** (1)  $\widehat{BCE}$  (或  $\widehat{BDE}$ )  $3 \widehat{ABD}$  (或  $\widehat{ACD}$ )  $3$

$$\widehat{BCE} \text{ (或 } \widehat{BDE}) \widehat{ABD} \text{ (或 } \widehat{ACD}) =$$

(2) 五边形  $ABCDE$  是正五边形. 理由如下:

同(1)可得  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E$ .

根据题意, 得  $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EA}$ , 即  $AB = BC = CD = DE = EA$ .

$\therefore$  五边形  $ABCDE$  是正五边形.

**新知生成** (1) 内接 外接 外切 内切

(2) 中心 半径 中心角 边心距

#### 【即时测评】

1. A

2. 略

#### 任务二

**例 解:** 如图, 连接  $OC, OB$ , 过点  $O$  作  $ON \perp CE$  于点  $N$ .

$\because$  多边形  $ABCDEF$  是正六边形,

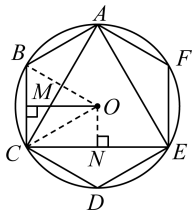
$$\therefore \angle COB = 60^\circ.$$

$\because OC = OB, \therefore \triangle COB$  是等边三角形.

$$\therefore \angle OCM = 60^\circ.$$

$$\therefore CM = \frac{1}{2}OC.$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}OC\right)^2 + 2^2 = OC^2. \therefore OC = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$



$$\because \angle OCN = 30^\circ, \therefore ON = \frac{1}{2}OC = \frac{2\sqrt{3}}{3}, CN = 2.$$

$$\therefore \text{该圆的内接正三角形 } ACE \text{ 的面积} = 6 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}.$$

[归纳总结] (1) 中心 (2) 直角

[即时测评]

B

#### 任务三

**探究** (1) 相等 (2)  $60^\circ$  半径 正六边形 正三角形 垂直

[归纳总结] (1) 圆心 (2) 圆规

[即时测评]

B

#### 【课堂小结】

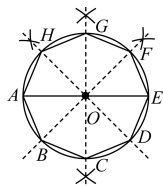
任意 各分点 外接圆 外接圆 圆心角 中心  $\frac{360^\circ}{n}$

$\frac{360^\circ}{n}$  直角

#### 【课后评价】

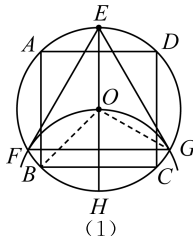
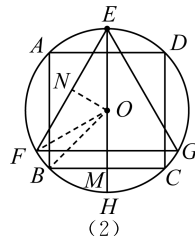
1. B 2. C 3. 2 4. 略 5. 略

6. 解: 如图, 正八边形  $ABCDEFGH$  即为所求.



7. B 8. B 9.  $80^\circ$  10.  $4 + 3\sqrt{2}$  11. 略

12. 解: (1) 如图(1), 连接  $EO$  并延长, 交  $\odot O$  于点  $H$ , 以点  $H$  为圆心,  $HO$  为半径作圆, 交  $\odot O$  于点  $F, G$ , 连接  $EF, EG, FG$ , 得  $\triangle EFG, \triangle EFG$  即为所求. (作法不唯一)



第 12 题解图

(2) 如图(1), 连接  $OB, OG$ .

$\because \triangle EFG$  是等边三角形,  $\therefore EH \perp GF$ .

$$\therefore \angle GOH = 2\angle GEH = 2 \times 30^\circ = 60^\circ.$$

$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,  $\therefore \angle BOH = 45^\circ$ .

$$\therefore \angle BOG = \angle BOH + \angle GOH = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ.$$

(3) 如图(2), 连接  $OF, OB$ , 过点  $O$  作  $ON \perp EF$  于点  $N$ .

$$\because OM \perp BC, \therefore BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2.$$

在  $\text{Rt}\triangle BOM$  中,  $OM = 2, \therefore OB = 2\sqrt{2}$ .

在  $\text{Rt}\triangle FON$  中,  $\angle OFN = 30^\circ, OF = 2\sqrt{2},$

$$\therefore ON = \sqrt{2}.$$

$$\therefore FN = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}.$$

$$\therefore EF = 2\sqrt{6}.$$

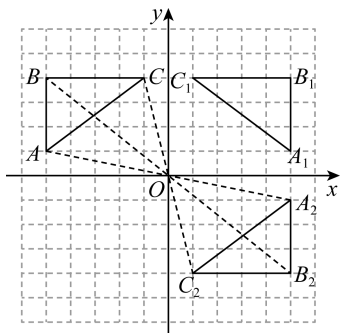
$\therefore$  等边三角形  $EFG$  的边长为  $2\sqrt{6}$ .

## 综合素养评价(二)

1. B 2. C 3. D 4. A 5. B 6. A 7. C 8. C 9. B  
10. B 11. -1 12. -1 13.  $x_1=1, x_2=-3$  14. 10  
15.  $(-3, -2)$  16.  $2+\sqrt{2}$

17. 解: (1) 整理方程, 得  $x^2+2x-15=0$ ,  
即  $(x+5)(x-3)=0$ ,  $\therefore x_1=-5, x_2=3$ .  
(2) 原方程化为  $2(x+3)=\pm 5(x-2)$ ,  
即  $2(x+3)=5(x-2)$  或  $2(x+3)=-5(x-2)$ ,  
 $\therefore x_1=\frac{16}{3}, x_2=\frac{4}{7}$ .

18. 解: (1) 如图所示.  
(2) 如图所示.  
(3)  $C_1(1, 4), C_2(1, -4)$ .  
(4) 由图可知  $\triangle A_1B_1C_1$  与  $\triangle A_2B_2C_2$  关于  $x$  轴对称.



19. 解: 设小路的宽度为  $x$  m, 则 9 块矩形地块可合成长为  $(20-4x)$  m, 宽为  $(14-4x)$  m 的矩形.  
根据题意, 得  $(20-4x)(14-4x)=24\times 9$ ,  
整理, 得  $2x^2-17x+8=0$ ,  
解得  $x_1=0.5, x_2=8$  (不符合题意, 舍去).  
答: 小路的宽度为 0.5 m.

20. 解: (1) 圆锥的母线长等于侧面展开图的扇形半径,  
设扇形圆心角为  $n^\circ$ , 则  $\frac{n\pi\times 3}{180}=5\pi$ ,

解得  $n=300$ .

$\therefore$  该圆锥的侧面展开图的圆心角度数为  $300^\circ$ .

(2)  $S_{\text{表}}=S_{\text{侧}}+S_{\text{底}}$

$$=\frac{300\pi\times 3^2}{360}+\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$=\frac{55}{4}\pi(\text{cm}^2).$$

$\therefore$  该圆锥的表面积为  $\frac{55}{4}\pi\text{cm}^2$ .

21. 解: (1)  $\because OD\perp BC$ ,

$$\therefore BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 6=3.$$

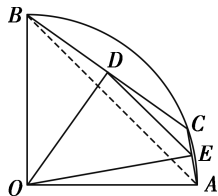
$$\because \angle BDO=90^\circ, OB=5, BD=3,$$

$$\therefore OD=\sqrt{OB^2-BD^2}=4,$$

即线段  $OD$  的长为 4.

(2) 存在,  $DE$  的长度保持不变.

如图, 连接  $AB$ .



$\because \angle AOB=90^\circ, OA=OB=5$ ,

$$\therefore AB=\sqrt{OB^2+OA^2}=5\sqrt{2}.$$

$\because OD\perp BC, OE\perp AC$ ,

$\therefore D$  和  $E$  分别是线段  $BC$  和  $AC$  的中点.

$\therefore DE$  是  $\triangle ABC$  的中位线.

$$\therefore DE=\frac{1}{2}AB=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$\therefore DE$  的长度保持不变.

22. 解: (1) 把  $L_1=6, L_2=0.2, G_1=1\ 200$  代入  $G_1\cdot L_1=G_2\cdot L_2$ ,

$$\text{得 } 1\ 200\times 6=0.2G_2, \text{ 解得 } G_2=36\ 000.$$

$$\therefore G_2=36\ 000\text{ N}.$$

$\therefore$  装有大象的铁笼及其挂钩的总质量  $G_2$  为 36 000 N.

(2)  $G_1$  是关于  $L_1$  的反比例函数.

$$\because G_1\cdot L_1=G_2\cdot L_2=1\ 200\times 6,$$

$$\therefore G_1=\frac{7\ 200}{L_1}(L_1>0).$$

$$(3) \text{ 把 } L_1=8 \text{ 代入 } G_1=\frac{7\ 200}{L_1},$$

$$\text{得 } G_1=\frac{7\ 200}{8}=900. \therefore G_1=900\text{ N}.$$

$$\text{把 } G_1=1\ 800 \text{ 代入 } G_1=\frac{7\ 200}{L_1},$$

$$\text{得 } 1\ 800=\frac{7\ 200}{L_1},$$

$$\text{解得 } L_1=4. \therefore L_1=4\text{ m}.$$

23. 解: (1)  $\triangle AEF$  是等腰直角三角形. 理由如下:

$\because$  把  $\triangle ADE$  绕点  $A$  顺时针旋转到  $\triangle ABF$  的位置,

$$\therefore \triangle ABF\cong\triangle ADE.$$

$$\therefore AF=AE, \angle FAB=\angle DAE.$$

$$\therefore \angle FAE=\angle DAB=90^\circ.$$

$\therefore \triangle AEF$  是等腰直角三角形.

(2)  $\because$  四边形  $AECF$  的面积等于正方形  $ABCD$  的面积,

$\therefore$  正方形  $ABCD$  的面积为 36.

$$\therefore AD=6.$$

在  $\text{Rt}\triangle ADE$  中,  $\because AD=6, DE=2$ ,

$$\therefore AE=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}.$$

$\because \triangle AEF$  是等腰直角三角形,

$$\therefore EF=\sqrt{AE^2+AE^2}=4\sqrt{5}.$$

24. 解: (1)  $\because$  每个房间每天定价每增加 10 元时, 就会有一个房间空闲,

$\therefore$  每个房间每天的定价增加 30 元, 就会有 3 个房间空闲.

$$\therefore \text{宾馆这一天的利润为 } (200+30-20)\times(50-3)=210\times 47=9\ 870(\text{元}).$$

答: 宾馆这一天的利润是 9 870 元.

(2) 设宾馆每天的利润为  $w$  元, 宾馆每个房间每天的定价为  $x$  元,

$$\text{则 } w=(x-20)\left(50-\frac{x-200}{10}\right)=(x-20)(70-0.1x)=-0.1x^2+72x-1\ 400,$$

$\therefore$  抛物线的开口向下, 对称轴为直线  $x=360$ .

$$\because 200\leq x\leq 300,$$

$\therefore$  当  $x=300$  时, 每天能获得最大利润, 最大利润是  $(300-20)\times(70-0.1\times 300)=280\times 40=11\ 200(\text{元}).$

答: 宾馆每个房间每天的定价为 300 元时, 每天能获得最大利润, 最大利润是 11 200 元.

25. (1) 证明: 如图, 连接  $OD$ , 则  $OD=OA$ ,

